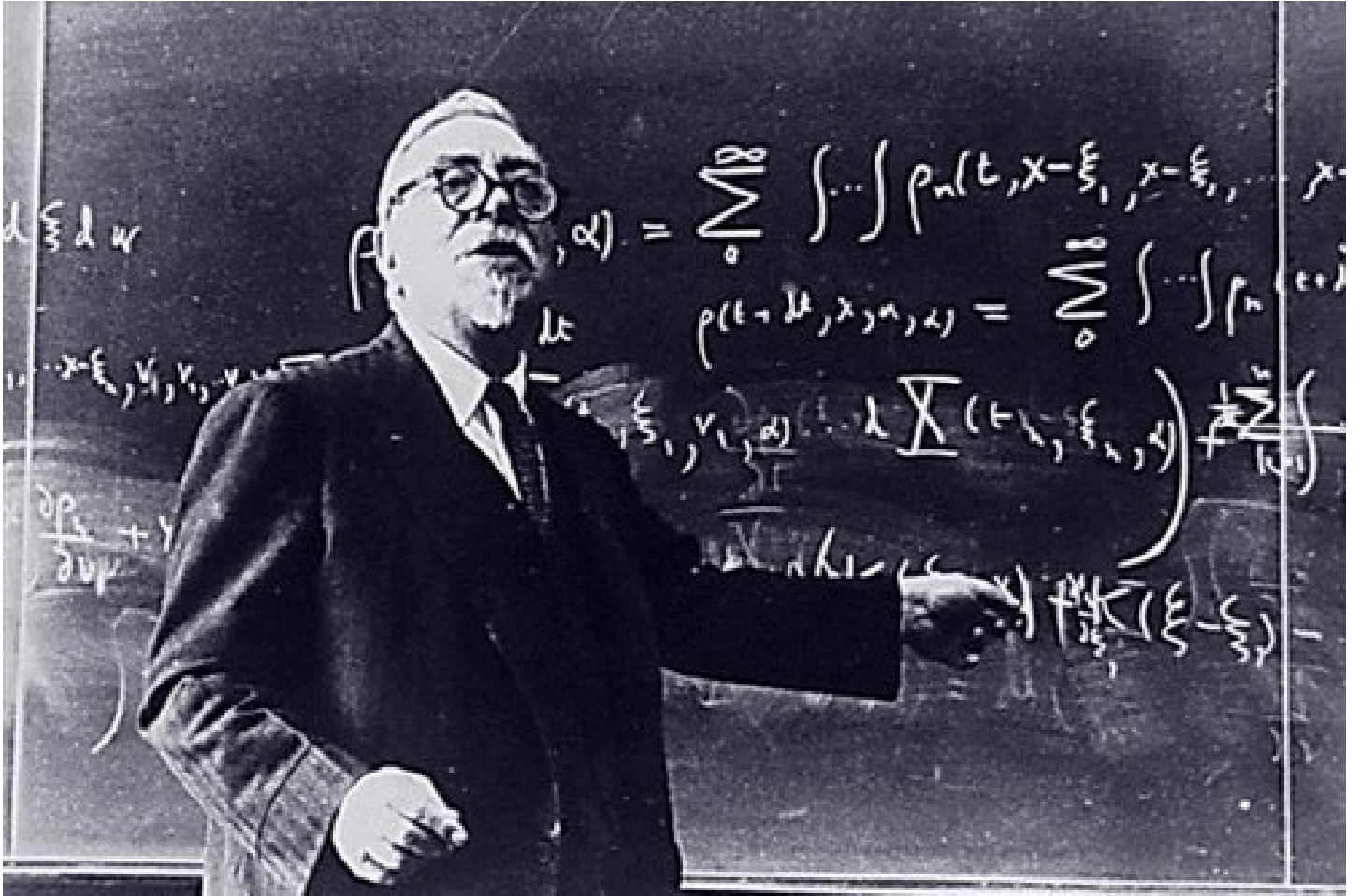


知乎



维纳滤波原理 (Wiener Filter)



赵易明

every breath in life, life in every breath

121 人赞同了该文章

▲ 赞同 121 ▼

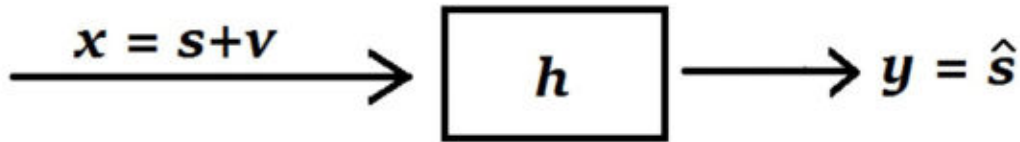
● 39 条评论

▶ 分享

知乎

$$x = s + v$$

设计一个滤波器 h



使得输出 $y = \hat{s}$ 尽可能地接近原始信号 s ，用均方误差分析误差的话，希望其数学期望最小

$$E\{e^2\} = E\{(s - x * h)^2\} = \min$$

在离散域内对上式对 h 求导

$$\begin{aligned} \frac{\partial E\{e^2\}}{\partial h} &= 2E\left\{\left[\sum_m h(m)x(n-m) - s(n)\right]\sum_j x(n-j)\right\} \\ &= 2E\left\{\sum_m h(m)\sum_j x(n-j)x(n-m) - \sum_j s(n)x(n-j)\right\} \\ &= 2\sum_m h(m)E\left\{\sum_j x(n-j)x(n-m)\right\} - 2E\left\{\sum_j s(n)x(n-j)\right\} \\ &= 2\sum_m h(m)R_{xx}(j-m) - 2R_{xs}(j) \end{aligned}$$

令导数为零得到

$$R_{xs}(j) = \sum_m h(m)R_{xx}(j-m) \quad j \geq 0$$

知乎

$$R_{xs}(m) = R_{ss}(m) + R_{vs}(m)$$

$$R_{xx}(m) = R_{ss}(m) + R_{sv}(m) + R_{vs}(m) + R_{vv}(m)$$

如果 s 与 v 互相独立, 那么

$$\begin{cases} R_{xs}(m) = R_{ss}(m) \\ R_{xx}(m) = R_{ss}(m) + R_{vv}(m) \end{cases}$$

如果将维纳霍夫方程进行 z 变换的话

$$H(z) = \frac{P_{xs}(z)}{P_{xx}(z)} = \frac{P_{ss}(z)}{P_{ss}(z) + P_{vv}(z)}$$

由此可知, 当噪声为零时 $H(z) = 1$; 当信号为零时 $H(z) = 0$; 因此它优于一般的线性滤波器。

◎ 假设系统滤波器 $h(n)$ 是一个因果序列且可用有限长 N 点序列去逼近, 即 FIR 系统

$$R_{xs}(j) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) R_{xx}(j-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) R_{xx}(m-j)$$

这样得到 N 个线性方程组

$$R_{xs}(0) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) R_{xx}(m-0)$$

$$R_{xs}(1) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) R_{xx}(m-1)$$

...

▲ 赞同 121 ▼

● 39 条评论

▶ 分享

知乎

$$R_{xs}(N-1) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) R_{xx}(m-N+1)$$

将其写成矩阵形式得

$$\begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xs}(0) \\ R_{xs}(1) \\ \vdots \\ R_{xs}(N-1) \end{pmatrix}$$

简写成

$$\mathbb{R}_{xx} \mathcal{H} = \mathbb{R}_{xs}$$

只要 \mathbb{R}_{xx} 非奇异, 就可以解得

$$\mathcal{H} = (\mathbb{R}_{xx})^{-1} \mathbb{R}_{xs}$$

◎ 非因果的 Wiener - Hopf 方程, 即非因果的 IIR 滤波

$$R_{xs}(j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) R_{xx}(j-m)$$

将其变换到 Z 域

$$H(z) = \frac{P_{xs}(z)}{P_{xx}(z)}$$

求得

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) z^{n-1} dz$$

● 系统辨识

维纳霍夫方程中

$$\mathcal{H} = (\mathbb{R}_{xx})^{-1}$$

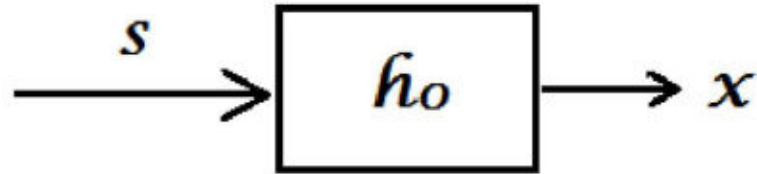
▲ 赞同 121

● 39 条评论

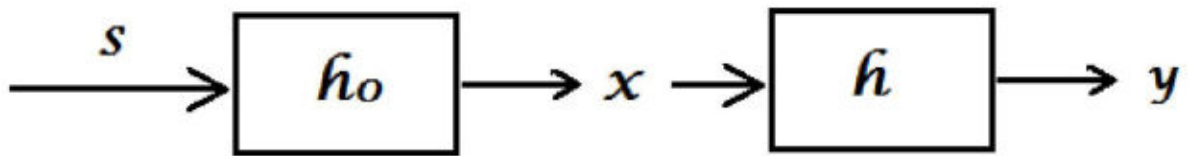
▶ 分类

知乎

统函数 \mathcal{H} 则还需要知道期望信号 s ，因此在系统辨识中需要自己给定一组已知的期望信号作为输入，即



然后得到观测信号 x ，因而可以根据维纳霍夫方程求解滤波函数 h ，全部过程如下



从变换域的角度来说， h_0 与 h 是一对互逆系统。



▲ 赞同 121 ▼

● 39 条评论

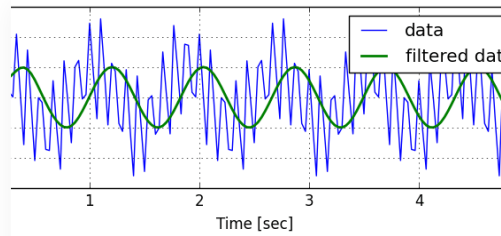
▶ 分享

知乎

7月14日 20:10 55 07

滤波算法 滤波器 维纳 Norbert Wiener

推荐阅读



五大滤波算法原理、场景及实践

临远科技-... 发表于Bing的...



卡尔曼滤波 (Kalman filter)

Rains... 发表于Boy

39 条评论

切换为时间排序

写下你的评论...



知乎用户

2016-06-01

感觉还是很难理解，要是能再通俗点就好了

5



赵易明 (作者) 回复 知乎用户

2016-06-01

学习之前先想想你要解决什么问题，然后就容易懂了

2



知乎用户 回复 赵易明 (作者)

2016-06-01

我对卡尔曼滤波还算比较清楚，按照步骤建...
维纳滤波的求解步骤到底有什么，而且能结...

赞同 121

39 条评论

分享

知乎

展开其他 2 条回复



he lao

2016-06-02

研究生期间上的现代信号处理如果也能这么讲就好了
都怪自己基础知识掌握不牢固，唉。到现在还是一团浆糊。

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 he lao

2016-06-02

知识总是脱离不了经验，高深的学问一定有接地气的道理在里面。

👍 赞



he lao 回复 赵易明 (作者)

2016-06-02

原来是南大校友啊
嘿嘿

👍 赞

展开其他 2 条回复



知乎用户

2016-12-08

请问一下切换到Z域的目的是什么？什么是Z域？我是小白 谢谢

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 知乎用户

2016-12-09

从另一个域里看其滤波性质，比如说频域。域变换说白了就是一种相关运算，相关性
投影就大。想一想空间坐标是如何分解为三个基向量的。

👍 1



小公主...苏菲亚

2016-12-08

非常感谢楼主，第一步对h求导那下有点不明白，h貌似是个函数，需要用到变分的知识吗

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 小公主...苏菲亚

2016-12-09

就是当成一个函数处理的，就是普通函数求导知识

👍 赞



小公主...苏菲亚 回复 赵易明 (作者)

2016-12-09

恩恩，谢谢

👍 赞

▲ 赞同 121



● 39 条评论

🚩 分享

知乎

你好，你在系统识别 中的 h_0 是指加噪声的过程吗？加噪声这个过程能在现实中独立分离开吗？

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 知乎用户

2017-04-24

差不多是的， h_0 可以看作是一个信道模型，比如说你在一个空荡的大厅里说话可能会听到自己的回声，那么这个回声产生的过程从频域的角度来看就好比原始信号在经过传输路径 h_0 的时候被滤波了一样，或者从时域波形的角度来看就是被一些 δ 函数卷积过了的叠加和，因而逆滤波的过程也就是一个退卷积的操作。你说的加噪声的过程在现实中独立分离开我不是很清楚你要问什么，但是如果说是系统辨识度的话，那么“过程分离”就是求 h_0 的过程。

希望我的解释对你有帮助)

👍 2



知乎用户

2017-04-28

请问，讲维纳滤波应用到图像去噪中，是怎么做的呢？

👍 赞



知乎用户

2017-04-28

将维纳滤波应用到图像去噪中，系统函数是怎么求的？呢去噪时是需要将图片拉成列向量吗？

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 知乎用户

2017-10-21

不好意思，我没有研究过图像处理，我觉得分解成向量的话，就默认行列独立性假设了，不知道在图像领域这样行不行，你大可以试试。

👍 赞



lee

2017-10-11

根据作者的介绍 单个信号的滤波可以用维纳滤波 要是不同传感器的滤波可以用卡尔曼滤波估计最优 对吗

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 lee

2017-10-21

可以这样操作，传感器数据融合用卡尔曼最好了

👍 赞

▲ 赞同 121 ▼

● 39 条评论

🚩 分享

知乎

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 铁车水上漂
发送信号

2017-10-25

👍 赞



xingchuilvye

2018-03-13

受教了，抱拳！！

文章中有个地方我有点困惑：

在对 $E(e^2)$ 求关于 h 的偏导的时候，

$X(n-j)$ 前面对 j 进行求和，私以为这里应该没必要，

这里求偏导应该可以理解为对 $h(j)$ 求偏导吧？

公式这里不太好编辑，就先这样草率地写了

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 xingchuilvye

2018-03-13

$de^2/dh = 2e*de/dh$ ，所以是对 $h(j)$ 求导。求和是必要的，两个求和符号是分别关于 m 与 j 的函数，因此对于非变量既可以拿到运算符里面也可以拿到运算符外面，为公式变换做准备。

👍 赞



xingchuilvye 回复 赵易明 (作者)

2018-03-14

谢谢你的回复，我下来再仔细看看

👍 赞

展开其他 1 条回复



柴前吾狼

2019-03-11

你好，小白没学过信号处理的知识，请问这个 $R_{xx}(\cdot)$ 函数有什么特殊含义吗

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 柴前吾狼

2019-03-11

自相关函数

👍 赞

▲ 赞同 121 ▼

● 39 条评论

🚩 分类

知乎

好的多谢

👍 赞



ffff鑫

2019-05-13

请问一组已知的期望信号怎么得？如果一直期望信号，那滤波有什么意义？

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 ffff鑫

2019-05-13

当然有用，你发送信号的时候比如约定在里头掺杂一个已知信号，接收方根据这个约定好的信号去估计信道函数，然后根据估计出来的信道函数对传输过来的信号做滤波不就可以提高信号质量了么[惊喜]

大部分人想用维娜滤波来提高信号质量，但是就会向你这么想：“我要有参考信号还滤毛波啊！”

所以要理清清楚维娜滤波是做什么的，你又要做什么的[小情绪]

👍 1



赵易明 (作者) 回复 ffff鑫

2019-05-13

把我写的几个维娜滤波的文章都看完可能会对你有点启发

👍 赞

展开其他 2 条回复



豪囍屁

2019-11-05

您好，请问我先已知一张模糊图与一张清晰图，通过维纳滤波，如何估计他的点扩散函数呢？

👍 赞



赵易明 (作者) 回复 豪囍屁

2019-11-06

自适应滤波

👍 赞



鱼公移山

04-16

讲的太好了

👍 赞

▲ 赞同 121 ▼

● 39 条评论

🚩 分享