WIKIPEDIA

小波分析

維基百科，自由的百科全書

小波分析（英語：wavelet analysis）或**小波轉換**（英語：wavelet transform）是指用有限長或快速衰減的「母小波」（mother wavelet）的振盪波形來表示訊號。該波形被縮放和平移以匹配輸入的訊號。

「小波」（英語：wavelet）一詞由讓·莫萊和阿列克斯·格羅斯曼在1980年代早期提出。他們用的是法語詞ondelette，意思就是「小波」。後來在英語裡，「onde」被改為「wave」而成了wavelet。

小波變化的發展，承襲Gabor transform的局部化思想，並且克服了傅立葉和Gabor transform的部分缺陷，小波變換提供了一個可以調變的時頻窗口，窗口的寬度(width)隨著頻率變化，頻率增高時，時間窗口的寬度就會變窄，以提高解析度．小波在整個時間範圍內的振幅平均值為0，具有有限的持續時間和突變的頻率與震幅，可以是不規則，或不對稱的訊號。

小波變換分成兩個大類：離散小波變換（DWT） 和連續小波轉換（CWT）。兩者的主要區別在於，連續變換在所有可能的縮放和平移上操作，而離散變換採用所有縮放和平移值的特定子集。

小波理論和幾個其他課題相關。所有小波變換可以視為時域頻域表示的形式，所以和調和分析相關。所有實際有用的「離散小波變換」使用包含有限脈衝響應濾波器的濾波器段（filter band）。構成CWT的小波受卡爾·屈普夫繆勒的屈普夫繆勒不確定性原理制約。

目錄

母小波

簡單來說（技術上並非如此），母小波函數$\psi\ (t)$必須滿足下列條件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|\ ^2\ dt = 1,\text{也即}\psi \in L^2(\mathbb{R})\text{並單位化}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi\ (t)|\ dt < \infty,\text{也即}\psi \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi\ (t)\ dt = 0$$

多數情況下，需要要求ψ連續且有一個矩(moment)為0的大整數M，也即對所有整數m<M滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m\ \psi\ (t)\ dt = 0$$

即母小波有M個消失矩(vanishing moment)，且M不等於0，這表示母小波必須不是常數且均值為0。

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$ ，稱作可採納性(admissibility condition)，其中$\widehat{\psi}(\omega)$是 $\psi(t)$的傅立葉轉換。

技術上來講，母小波必須滿足可採納性條件以使某個解析度的恆等成立。

根據Morlet的原始形式，母小波定義為

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

其中a是縮放因子，當|a|<1時，母小波被壓縮，在時間軸上有較小的支撐度，並且對應到高頻，因為母小波變窄、變化變快， 反之，當|a|>1時，母小波變寬、變化較慢，所以對應到低頻。b則是平移參數，用來決定母小波的位置。

根據訊號處理的屈普夫繆勒不確定性原理：

$$\Delta t \Delta \omega \geqq \frac{1}{2}$$

t 是時間，ω是角頻率(ω = 2πf，f是瞬時頻率)。

當時間解析度較高時，頻率解析度就會下降，反之，頻率解析度高時，時間解析度下降。當母小波或窗函數取的越寬，Δt的值越大。

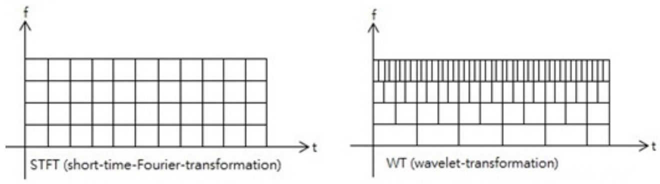
當Δt越大:

1. 縮放因子越大，對應低頻。
2. 頻率解析度高。
3. 時間解析度低。

當Δt越小:

1. 縮放因子越小，對應高頻。
2. 頻率解析度低。
3. 時間解析度高。

雖然跟短時距傅立葉轉換一樣能同時分析時間和頻率，但是小波轉換在高頻的時間解析度較好，在低頻時則是頻率解析度較好， 剛好符合我們對訊號分析在高低頻的解析度要求，因為在低頻時，例如頻率從1Hz變到2Hz，頻率差了一倍，所以頻率的變化相較時間的變化是比較明顯且重要的，然而在高頻時，例如頻率從1000Hz變到1001Hz，頻率相較時間的變化不大，所以對時間解析度的要求較高。但是短時距傅立葉轉換的解析度並不會隨著頻率而變化，下圖顯示兩者解析度變化的比較:



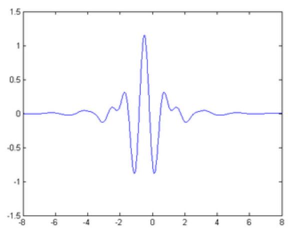
母小波的限制

1. Compact support
2. Real
3. Even Symmetric or Odd Symmetric
4. Vanishing Moments

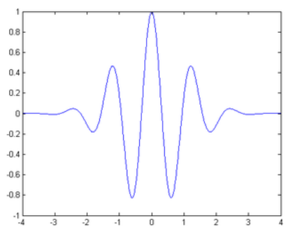
support: the region where a function is not equal to zero

compact support: the width of the support is not infinite

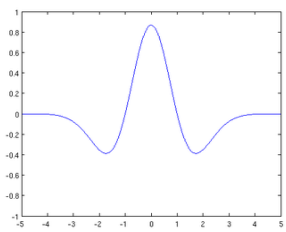
母小波的一些例子：



Meyer



Morlet

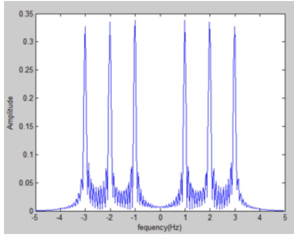


墨西哥帽

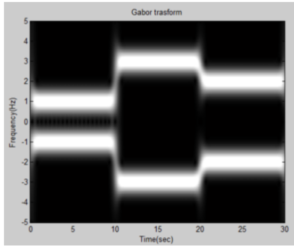
和傅里葉變換比較

小波變換經常和傅里葉變換做比較，在後者中訊號用正弦函數的和來表示。

轉換形式	數學式	參數
傅立葉變換	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$	f, 頻率
短時距傅立葉變換	$X(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau)x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$	t, 時間; f, 頻率
小波轉換	$X(a,b)=\frac{1}{\sqrt{b}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\Psi\left(\frac{t-a}{b}\right)dt$	b, 尺度; a, 平移



傅立葉轉換



STFT

標準的傅立葉變換將訊號從時域轉換到頻率域上做分析，但沒辦法從頻率域上得知訊號在不同時間的頻率資訊，只能知道該訊號包含哪些頻率成份，因此不適合用來分析一個頻率會隨著時間而改變的訊號，例如:音樂訊號。

然而短時距傅立葉變換（Short-time Fourier transform）（STFT）比傅立葉變換多了一個窗函數(window function)，可以分析出隨著時間變化的頻率,隨著窗函數大小的不同會有不同的頻率和時間解析度，以方形窗函數為例，當窗函數寬度越大，頻率的解析度越好，但時間解析度下降，反之，當窗函數寬度越小，時間的解析度越好，頻率解析度下降，然而有限長度的窗函數大小會限制頻率解析度，不過小波轉換能解決這個問題，通過多解析度分析通常可以給出更好的訊號表示。

另外，當輸入訊號為二維時（例如：影像），短時距傅立葉變換的輸出為四維度，但小波轉換仍是二維訊號，所以在影像處理上通常會使用小波轉換而非短時距傅立葉變換。

小波變換的計算複雜度也更小，只需要$\mathcal{O}(N)$時間，快於快速傅里葉變換的$\mathcal{O}(N\log N)$，其中N代表數據大小。

小波的定義

wavelet是指小型波(在傅立葉分析裡的弦波是大型波)，簡單說來，小波(wavelet)是一個衰減迅速的振盪。

有幾種定義小波（或者小波族）的方法:

縮放濾波器

小波完全通過縮放濾波器g——一個低通有限脈衝響應（FIR）長度為$2N$和為1的濾波器——來定義。在雙正交小波的情況，分解和重建的濾波器分別定義。

高通濾波器的分析作為低通的QMF來計算，而重建濾波器為分解的時間反轉。例如Daubechies和Symlet小波。

縮放函數

小波由時域中的小波函數$\psi(t)$ (即母小波)和縮放函數$\phi(t)$ (也稱為父小波)來定義。

小波函數實際上是帶通濾波器，每一級縮放將帶寬減半。這產生了一個問題，如果要覆蓋整個譜需要無窮多的級。縮放函數濾掉變換的最低級並保證整個譜被覆蓋到。詳細解釋請參看[1] (http://perso.wanadoo.fr/polyvalens/clemens/wavelets/wavelets.html#note7) 。

對於有緊支撐的小波，$\phi(t)$可以視為有限長，並等價於縮放濾波器g。例如Meyer小波。

小波函數

小波只有時域表示，作為小波函數$\psi(t)$。例如墨西哥帽小波。

小波的分類

小波以continuous / discrete 來分，有 3 種:

1. 第一種輸入為: continuous，輸出為: continuous

-> 稱為 Continuous Wavelet Transform

2. 第二種輸入為: continuous，輸出為:discrete

-> 稱為 continuous wavelet transform with discrete coefficients

3. 第三種輸入為: discrete，輸出為:discrete

-> 稱為 Discrete Wavelet Transform

應用

離散小波變換（DWT） 通常被用於訊號編碼，比如在工程和計算機科學，而連續小波轉換（CWT）通常被用於訊號分析，即科學研究類。小波變換現在被大量不同的應用領域採納，有時甚至會取代了傅里葉變換的位置，在許多領域都有這樣的轉變。例如很多物理學的領域亦經歷了這個轉變，包括分子動力學，從頭計算（ab initio calculations），天文物理學，密度矩陣局部化，地球物理學，光學，湍流，和量子力學。其他經歷了這種變化的學科有圖像處理，血壓，心率和心電圖分析，DNA分析，蛋白質分析，氣象學，通用訊號處理，語言識別，計算機圖形學，和多分形分析。

所有wavelet適用的運用中, 大致上有下列兩項特點：

1. 訊號的頻率分布，會隨著不同的時間(或地點)有較大變異
2. Multiscale 的分析扮演重要的角色

通常在做訊號或影像處理的過程中，會面臨到取樣點的取捨:

1. Larger sampling interval will ignore the detail
2. smaller sampling interval will require a lot of data

而wavelet transforms comprise them.

影像分割

影像分割可以定義為，將影像分成若干個區域，而這些像素組成區域必須為各個類似的像素所連結而成．

影像的分割大略可以分為:

1. 臨界值法
2. 區域法
3. 邊界法
4. 邊緣法

臨界值法： 主要是靠設定臨界值，來去區分物體與背景．

區域法： 將影像分為若干個子區域，這些子區域有相連性

邊界法： 藉由求影像梯度大小，來找出正確影像邊界的方法

邊緣法： 利用一階導數的大小來偵測出邊緣所在的位置，之後再使用一階導數的方向將小的邊緣連結成邊界的方法．

藉由小波轉換的方法，將原始的影像，經過特定的小波轉換的技巧後, EX: symlets wavelet, 濾除掉雜訊，並且 對Ｘ軸方向做一次小波轉換，對Y軸方向做一次小波轉換，之後採用影像分割的方法，提高影像分割的精確度．

影像壓縮

影像壓縮的過程

原始的圖形資料 -> 色彩模式的轉換 -> DCT轉換 -> 量化器 -> 編碼器 -> 壓縮完成

小波轉換最常見的應用是用於影像壓縮。和其他變換一樣，小波變換可以用於原始影像（例如圖像），然後將變換後的數據編碼，得到有效的壓縮。影像壓縮通常可分為三大步驟，分別是轉換(Transform)、量化(Quantization)和編碼(Coding)[1]。其中轉換這個步驟是將原始資料轉換成另一種表示法，可經由逆轉換得到原始訊號。轉換的目的在於除去訊號取樣的相關性，也就是去除取樣間的累贅。在對影像資料轉換時，通常是將影像先分割成不重疊小區塊，再對小區塊進行單位轉換，而單位轉換是一種可逆的轉換，其演算的核心為正交的基底函數。訊號可以分為規則性訊號與非規則性訊號兩類，所謂規則性訊號即是訊號中所有組成物是同時發生的；而非規則性訊號其組成物並非是同時發生。對於規則的訊號，理想且有效的轉換方式是傅立葉轉換。而適用於非規則性訊號的工具就是小波轉換。較為知名的影像壓縮檔案格式JPEG 2000就是採用小波的圖像標準，演算法細節請參考小波壓縮。

wavelet影像壓縮未來的趨勢為:

1. 支援更多的色彩, EX: RGB
2. 加強運算能力，使其能夠支援更多影像格式
3. 使用wavelet transform消除高頻訊號，加快運算
4. 應用在視訊處理上

邊緣偵測

小波轉換亦常應用於影像的邊緣偵測（edge detection），傳統的影像邊緣偵測採用二維差分運算子以偵測影像邊緣，乃假設影像邊緣上和邊緣旁之影像灰階值必然不同，當取微分時，在邊緣上會呈現非常大梯度值，藉由調整影像灰階值的臨界值參數可強化邊緣，但二維小波轉換則是一種效果較佳的影像邊緣偵測方法，當取小波轉換時，在影像邊緣上亦會呈現非常大的梯度值。在電腦視覺或影像處理上經常使用動態輪廓或蛇行模式來偵測物體的邊界或邊緣。

在物體紋路及表面瑕疵檢測上亦有其應用，由於小波轉換有局部性處理的能力，對於小區域之瑕疵能有效凸顯，其頻率特性使得在處理瑕疵上不易受環境影響。相對於頻率域之轉換方法，小波轉換處理速度快，因不須事先經過訓練與繁複的數學計算，使得小波轉換在速度處理上獲得不錯效果，其具有多解析(Multi-resolution)與多尺度(Multi-scale)能力，使得在處理紋路瑕疵上不會產生方塊效應。小波轉換不會變動影像物體的相對位置，且保留紋路與瑕疵的空間關係與影像大小[2]。

音樂訊號分析

小波轉換亦可用在音樂訊號上，像是樂器自動辨識的應用，第一種為先使用一維小波轉換將聲音訊號分解為不同頻率範圍的各個頻帶，接著再對各個頻帶中擷取能量平均值以及能量標準差視為一維小波轉換之特徵向量。而第二種方法為先將聲音訊號轉成頻譜圖並視為一張二維影像，對此頻譜圖做二維小波轉換分解出各個頻帶，再對頻帶中擷取能量平均值和能量標準差做為二維小波的特徵向量。最後，利用相鄰近似法使用歐基里德距離來計算測試資料的特徵向量和每一樂器的特徵向量之距離，並取最小距離為辨識結果的樂器類別[3]。

而小波轉換也常用在音樂訊號的壓縮，由於人耳對聲音各頻帶是有其感知力的，故有些頻帶人無法聽見，有些頻帶人耳特別靈敏。利用離散小波轉換來將音樂訊號做高低頻切割多次，就可以將原訊號分成許多子頻帶(sub-band)，但傳統離散小波轉換計算架構，將波型分成高頻與低頻後，下一次的切割只對低頻做切割，故沒辦法完全分割出與人耳感知頻帶相符合的子頻帶。於是更精細的計算架構被提出，稱為離散小波包轉換(discrete wavelet packet transform)，原理就是音樂訊號被分成高頻訊號後，會再做分割。一段音樂訊號就可以被分割成更貼近人耳25個頻帶的訊號，這樣的分割法更優於一般傅立葉分析所使用的濾波器，從這些子頻帶中，找出能夠被屏蔽的訊號，濾除之後，就可以將原本音樂訊號檔案大小壓縮了。

在辨識音樂訊號的樂譜上也有其應用，音樂訊號由一個個音符組成，而每個音符以特定的節奏出現，通常是成群的諧音出現，若要分辨出一段訊號最主要的頻率為何，必須濾除其泛音才能判斷，而由離散小波轉換的多重解析度分割就可以將泛音區隔在不同的子頻帶中，而且訊號中的雜訊也可以依同樣方法被濾除。由於是要偵測transient 現象，基於要偵測什麼樣的訊號就使用跟它很像的訊號當作基底拆解它這個原則，故在選擇小波基底時，就要選擇較有突然劇烈變化的母小波，如此一來小波轉換後的小波係數，能量就會聚集在原訊號有劇烈變化之處了[4]，由此方法可有效辨識音樂訊號的音高(也就是頻率)。

音樂訊號簡易壓縮

原始音樂訊號 -> MDCT ->去除不重要的係數 -> IMDCT -> 輸出結果

MDCT: Modified Discrete Cosine Transform

遙測影像分析

連續小波轉換常應用於遙測影像分析上，如海底地形之解析[5]，利用具有分析非均勻訊號的高維連續小波轉換理論作為遙測影像的分析工具，從中求取影像波浪譜，再從影像波浪譜中反算出觀測區域的水深值。傳統的研究多將海洋遙測影像假設為均勻(homogeneous)的海面影像，並採用被分析影像為均勻性前提所發展出的方法進行譜轉換，其分析所得之影像譜實際上為整個遙測影像波數譜的平均值。然而自然界的訊號常存在有非均勻的特性，近岸海域的波浪亦不例外。為能從分析非均勻影像訊號中分析得到合理且準確的水深資訊，可引入非均勻訊號分析理論-小波轉換。如高維小波轉換理論可應用在分析海洋遙測影像之研究，藉以從中計算出底床地形的資訊，透過小波轉換的非定常訊號的解析能力，可將整張遙測影像分解為不同的子影像，每一塊子影像區域的波場理論上具有一定程度之均勻性，再進而從各子影像中求解水深值，藉以描繪出觀測海域的水深資訊。

生物醫學訊號分析

離散小波轉換亦常應用在生醫領域中，因為其具有較低的複雜度與較佳的時域-頻域分析之特性，而被選擇作為分析生醫訊號的方法。心電圖 (Electrocardiography) 與腦波圖 (Electroencephalography) 是兩項常見的生醫應用。在心電圖方面，為了診斷心臟相關疾病，可使用離散小波轉換去除原始訊號中冗餘的特徵，並由重建的訊號中偵測R-R區間。

一般而言，病患之心電圖時常需要全天候的觀察與分析，因此資料量相當龐大，此時便需要很大的儲存空間來儲存這些資料，因此有必要將心電圖之資料加以壓縮，才可有效減少所需之儲存設備成本。訊號的壓縮可分為無失真(lossless)壓縮和失真(lossy)壓縮兩種，若是依傳統醫學觀念，或許應該使用無失真壓縮，才可避免因資訊不完整而造成誤診等醫療疏失，但由於傳送資訊之網路頻寬有限且資料龐大，因此使用失真(lossy)壓縮以達到更大的壓縮效率已成必然，在增大壓縮效率的同時，亦可保證其重建訊號之可靠度，以避免不必要的醫療疏失便是一重要課題，小波轉換便可達到此項目標。

而小波轉換亦有去除不必要雜訊之功用，以正確判讀心電圖，此方法稱為小波係數臨界法(wavelet coefficients thresholding)，訊號經小波轉換後，雜訊會成為較小的訊號(low scale)，因此將較小scale的訊號去除，即可去除雜訊，一般的做法為設立一臨界值，將低於此臨界值的訊號捨棄，高於臨界值的訊號保留。而選擇臨界值的方式有兩種，一種為硬式臨界值(hard threshold)，其臨界值為一常數，不隨輸入訊號改變而改變，此法優點為設計簡單，但得到的結果並不理想，若改由不同輸入訊號形成不同臨界值，則稱為軟式臨界值，將經小波轉換後每一頻帶之變異數(variance)開根號後形成標準差，而後以標準差當作參數作為臨界值，此法產生之臨界值會因輸入訊號長度的不同而改變[6]。

另一個小波轉換在生醫領域的應用則是應用在腦電圖上，早期腦電圖訊號分析技術，普遍以傅立葉轉換為主，近年來，小波轉換技術逐漸被採用，其特性在對於未知訊號的頻率分布，在時間軸上可以得到很好的解析度，適合應用於腦波的不穩定訊號分析處理。再配合類神經網路非線性分辨能力，可有效分辨α波、β波。

亦有一個應用是在於腦電圖中正常的背景訊號與不正常的尖峰訊號之區分，患有癲癇的病人其不正常的尖峰訊號其形狀會類似一個凸起的尖峰，故此訊號殼稱為尖峰訊號(spike)，利用多重解析變換的小波轉換(multi-resolution wavelet transform)可用來分析這類型態類似、但大小區間變異很大的癲癇訊號。

歷史

第一個小波轉換是阿爾佛雷德·哈爾在 1909年提出來的哈爾小波(Haar wavelet)，但是當時小波的概念並不存在，直到1981年地球物理學家吉恩·莫萊特才提出小波的概念，且小波轉換變成分析地震波的新工具。

之後在1984年吉恩·莫萊特和 物理學家亞歷克斯·格羅斯曼發明了"wavelet"一詞，並且對於連續小波轉換和其各種應用有比較詳盡的數學研究。

在1985年之前，大家所熟知的正交小波(orthogonal wavelet)只有Haar小波，然而數學家伊夫·梅耶爾在1985年建立了第二種正交小波，即Meyer小波。接著越來越多人投入這個領域並在1987年法國辦了第一屆國際研討會。

1988年，史蒂芬·馬拉特和伊夫·梅耶爾提出了多解析度的概念，同年(1988)，英格麗·多貝西建立了緊支撐正交小波(compact support orthogonal wavelet)。隔年(1989)史蒂芬·馬拉特提出了快速小波轉換。隨著快速小波轉換的發展，許多小波轉換的應用得以實現。

除了先前許多卓越的數學家像是英格麗·多貝西，亞歷克斯·格羅斯曼，史蒂芬·馬拉特，伊夫·梅耶爾，羅納德·德沃爾，羅納德·科夫曼，維克多·魏克爾豪斯在小波理論上都有顯著的貢獻，之後直到現在也陸續有人提出了許多方法和應用。

時間線

- 1909年: 第一個小波（Haar小波）由阿爾佛雷德·哈爾提出
- 1981年: 吉恩·莫萊特提出小波概念
- 1984年: 吉恩·莫萊特和亞歷克斯·格羅斯曼發明了"小波（wavelet）"一詞
- 1985年: 伊夫·梅耶爾建立Meyer小波
- 1987年: 第一屆國際研討會在法國
- 1988年: 史蒂芬·馬拉特和 伊夫·梅耶爾 提出了多解析度的概念
- 1988年: 多貝西小波
- 1989年: 快速小波轉換 （FWT）
- 1990年代: 離散小波變換 （DWT）
- 1999年: 方向小波轉換
- 2000年: JPEG2000

小波轉換

如果函數$f \in L_2(R)$，那麼級數

$$\sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\,\psi_{j,k}(t)$$

稱作f的小波級數，且

$$\langle f,\psi_{j,k}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi_{j,k}(t)\mathrm{d}t$$

為f的小波係數。

存在著大量的小波變換，每個適合不同的應用。完整的列表參看小波相關的變換列表，常見的如下：

- 連續小波變換（CWT）
- 離散小波變換（DWT）
- 快速小波轉換（FWT）
- 小波包分解（Wavelet packet decomposition）（WPD）

小波轉換的優點

1. 可以同時觀察頻率和時間軸，在頻率高時有較好的時間解析度，在頻率低時有較好的頻率解析度。
2. 有快速小波轉換可以加速運算。
3. 可以分離出訊號的精細或粗糙成分。
4. 在小波理論中，可以用較少的小波係數去逼近一個函數。
5. 對訊號去噪或壓縮訊號時，不會對訊號造成明顯的破壞。
6. 適用於分析突變訊號，以及奇異訊號
7. 可以分析訊號不同scale大小樣貌

小波轉換的缺點

1. 運算量大，比較難做到即時處理
2. 母小波挑選的限制

小波轉換和波的比較

1. 小波的大小對比波的頻率
2. 小波的duration(window size)對比波的infinite duration
3. 小波的temporal localization對比波的 no temporal localization

小波轉換，傅立葉轉換，**Gabor**轉換的比較

傅立葉轉換具有局部性，Gabor轉換沒有具有局部性

小波轉換具有局部性，並且可以改變參數來調整頻譜的窗口和結構形狀，進而做到"變焦"的作用.

因此小波分析可以達到多解析度的效果

小波列表

離散小波

- Beylkin（18）
- Coiflet小波（6, 12, 18, 24, 30）
- 多貝西小波（Daubechies小波）（2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20）
- Cohen-Daubechies-Feauveau小波，有時稱為「多貝西」9/7 (Daubechies 9/7)或CDF9/7
- 哈爾小波轉換
- Vaidyanathan濾波器（24）
- Symmlet
- 複小波變換

連續小波

- 墨西哥帽小波
- 厄爾米特小波
- 厄爾米特帽小波
- 復墨西哥帽小波
- Morlet小波
- 修正Morlet小波
- Addison小波
- 希爾伯特-厄爾米特小波

相關條目

- 濾波器段
- 超寬帶無線傳輸小波。
- 短時距傅立葉變換
- chirplet變換
- 分數傅立葉變換
- Noiselet

參考文獻

1. http://www.csprs.org.tw/Temp/200509-10-3-305-314.pdf
2. 應用小波轉換於表面瑕疵檢驗__臺灣博碩士論文知識加值系統.
3. 應用小波轉換特徵於音樂樂器之辨識 - Lee - Journal of Information Technology and Applications.
4. http://djj.ee.ntu.edu.tw/Tutorial_Wavelet%20for%20Music%20Signal%20Analysis%20_1.pdf
5. http://www.comc.ncku.edu.tw/chinese/h_paper/%E6%9C%9F%E5%88%8A%E8%AB%96%E6%96%87%E6%AA%94%E6%A1%882012/99%E5%B
6. http://djj.ee.ntu.edu.tw/Wavelet_Biomedical_SP.docx

參考書目

- Paul S. Addison, *The Illustrated Wavelet Transform Handbook*, Institute of Physics, 2002, ISBN 0-7503-0692-0
- Ingrid Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, ISBN 0-89871-274-2
- Mladen Victor Wickerhauser, *Adapted Wavelet Analysis From Theory to Software*, A K Peters Ltd, 1994, ISBN 1-56881-041-5
- P. P. Viadyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, 1993, ISBN 0-13-605718-7
- A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way, by S. Malla

外部連結

- Wavelet Digest (http://www.wavelet.org)
- Amaras Wavelet Page (https://web.archive.org/web/20070630222556/http://www.amara.com/current/wavelet.html)
- Wavelet Posting Board (https://web.archive.org/web/20051001062305/http://www.ondelette.com/indexen.html)
- The Wavelet Tutorial by Polikar (http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html)
- OpenSource Wavelet C Code (http://herbert.the-little-red-haired-girl.org/en/software/wavelet/)
- An Introduction to Wavelets (https://web.archive.org/web/20070614081512/http://www.amara.com/IEEEwave/IEEEwavelet.html)
- Filter Coefficients of Popular Wavelets (http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/5502-filter-coefficients-to-popular-wavelets)
- Wavelets for Kids (PDF file) (http://www.isye.gatech.edu/~brani/wp/kidsA.pdf)（introductory）
- Link collection about wavelets (http://www.cosy.sbg.ac.at/~uhl/wav.html)
- List of Wavelet resources, libraries and source codes (http://www.compression-links.info/Wavelets)
- A really friendly guide to wavelets (http://perso.wanadoo.fr/polyvalens/clemens/wavelets/wavelets.html)
- Wavelet forums (French) (https://web.archive.org/web/20051118162345/http://www.ondelette.com/index.html) Wavelet forum (English) (https://web.archive.org/web/20051001062305/http://www.ondelette.com/indexen.html)
- R語言小波分析wavelet (http://wenku.baidu.com/view/cd757ded6294dd88d0d26ba8.html)