Homework#14 林靖 108061112

(1) $H_1(z) = \sum_{n=\infty}^{-\infty} h_1[n] z^{-n}$, ROC : R_{h_1}

$H_2(z) = \sum_{n=\infty}^{-\infty} h_2[n] z^{-n}$, ROC : R_{h_2}

$g[n] = a h_1[n] + b h_2[n]$

$G(z) = \sum_{n=\infty}^{-\infty} g[n] z^{-n}$, ROC : $R_{h_1} \cap R_{h_2}$

$= \sum_{n=\infty}^{-\infty} \left(a h_1[n] + b h_2[n] \right) z^{-n}$

$= a \sum_{n=\infty}^{-\infty} h_1[n] z^{-n} + b \sum_{n=\infty}^{-\infty} h_2[n] z^{-n}$

$= a \, H_1(z) + b \, H_2(z)$, ROC : $R_{h_1} \cap R_{h_2}$

(2) $H_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] \cdot z^{-n}$, ROC : R_{h_1}

$H_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n]\, z^{-n}$, ROC : R_{h_2}

$g[n] = h_1[n] * h_2[n]$

$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]\, z^{-n}$, ROC: $R_{h_1} \cap R_{h_2}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(h_1[n] * h_2[n] \right) z^{-n}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[m]\, h_2[n-m]\, z^{-n}$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[m]\, h_2[n-m]\, z^{-n}$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[m]\, z^{-m}\, h_2[n-m]\, z^{-(n-m)}$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[m]\, z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n-m]\, z^{-(n-m)}$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[m]\, z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n]\, z^{-n}$

$= H_1(z)\, H_2(z)$, ROC : $R_{h_1} \cap R_{h_2}$

(3)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$$g[n] = h[n-n_0]$$

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-n_0] z^{-n}$$

$$= \sum_{n-n_0=-\infty}^{\infty} h[n-n_0] z^{-n+n_0-n_0}$$

$$= z^{-n_0} \sum_{n-n_0=-\infty}^{\infty} h[n-n_0] z^{-(n-n_0)}$$

$$= z^{-n_0} H(z)$$

因為推導的過程中
沒有做任何的限制
所以收斂區間不變

(4)

$$H(z) = \sum_{n=\infty}^{-\infty} h[n]\, z^{-n}, \quad ROC: \alpha < |z| < \beta$$

$$g[n] = a^n h[n]$$

$$G(z) = \sum_{n=\infty}^{-\infty} g[n]\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=\infty}^{-\infty} a^n h[n]\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=\infty}^{-\infty} h[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

$$= H\left(\frac{z}{a}\right) \qquad , \quad ROC: \alpha < \left|\frac{z}{a}\right| < \beta$$

ROC: $|a|\, R_h$

(5) $H(z) = \sum_{n=\infty}^{-\infty} h[n]\, z^{-n}$, ROC : R_h

$g[n] = h[n] - h[n-1]$

$G(z) = H(z) - z^{-1} H(z)$, ROC: $R_h \cap R_h$

$= (1 - z^{-1})\, H(z)$, ROC : R_h

(6) $$H(z) = \Sigma_{n=\infty}^{-\infty} h[n]\, z^{-n}, \quad \text{ROC: } R_h$$

$$g[n] = \Sigma_{m=-\infty}^{n} h[m]$$

$$= \Sigma_{m=\infty}^{-\infty} h[m]\, u[-(m-n)]$$

$$= \Sigma_{m=\infty}^{-\infty} h[m]\, u[n-m]$$

$$= h[n] * u[n]$$

$$G(z) = H(z) \times U(z)$$

$$= H(z) \times \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \text{ROC: } R_h \cap |z| > 1$$

(7)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, z^{-n} \quad , \quad ROC: R_h$$

$$\frac{d}{dz} H(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, z^{-n}$$

$$\frac{d}{dz} H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} h[n]\, z^{-n}$$

$$\frac{d}{dz} H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\, h[n]\, z^{-n-1}$$

$$-z \frac{d}{dz} H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, h[n]\, z^{-n} \quad , \quad ROC: R_h$$

因為推導過程
沒有做任何限制
所以收斂區間不變