Homework #10 林靖 108061112

Problem 1

(1)

1.1 $h(t) = e^{-at} u(t)$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

$$= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{t=0}^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{s+a} \left[e^{-(s+a)\infty} - 1 \right]$$

$$= \frac{-1}{s+a} \left[e^{-(\sigma+\alpha)\infty} \underbrace{e^{-j(2\pi f+\beta)\infty}}_{\text{永遠在單位圓上}} - 1 \right]$$

$$= \frac{-1}{s+a} \left[0 - 1 \right] , \quad \text{當 } \sigma+\alpha > 0$$

$$= \frac{1}{s+a} , \quad R.O.C.: \ Re\{s\} > -Re\{a\}$$

1.2 $h(t) = -e^{-at}u(-t)$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_{t=-\infty}^{0}$$

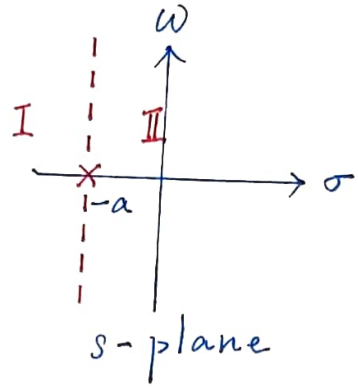
$$= \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{(s+a)\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{(s+a)\infty}\underbrace{e^{j(2\pi f+\beta)\infty}}_{\text{永遠在單位圓上}}\right]$$

$$= \frac{1}{s+a}\text{，當 } \sigma + \alpha < 0$$

R.O.C.: $\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$

討論



已知 $H(s) = \frac{1}{s+a}$

要先知道收斂區間

才能求得 $h(t)$ 是 $-e^{-at}u(-t)$ 還是 $e^{-at}u(t)$

region I	region II
$\sigma < -a$	$\sigma > -a$
$h(t) = -e^{-at}u(-t)$	$h(t) = e^{-at}u(t)$
non-causal	causal

1.3 、1.4

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\frac{d}{ds} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -t\, x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$-t\, x(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds} X(s)$$

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$

$$-t\, e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$

$$t\, e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+a)^2}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$

$$-e^{-at} u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} < -Re\{a\}$$

$$t\, e^{-at} u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} < -Re\{a\}$$

$$-t\, e^{-at} u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+a)^2}, \quad Re\{s\} < -Re\{a\}$$

(2)

由 (1) 的結果可知

$$e^{-at}u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \quad R.O.C. : Re\{s\} > -Re\{a\}$$

$$e^{-(a+j\omega_0)t}u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(a+j\omega_0)},$$

$$R.O.C. : Re\{s\} > -Re\{a+j\omega\}$$

$$Re\{s\} > -Re\{a\}$$

$$e^{-at}\cos\omega_0 t \; u(t) + j\,e^{-at}\sin\omega_0 t \; u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} + j\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

$$R.O.C. : Re\{s\} > -Re\{a\}$$

當 $a = 0$

$$\cos\omega_0 t \; u(t) + j\sin\omega_0 t \; u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{s}{s^2+\omega_0^2} + j\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$R.O.C. : Re\{s\} > 0$$