Homework #9 林靖 108061112

(1)

$$h(t) = e^{-at} u(t)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+s)t} dt$$

$$= \frac{-1}{a+s} e^{-(a+s)t} \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{a+s} \left[e^{-(a+s)\infty} - 1 \right]$$

$$= \frac{-1}{a+s} \left[e^{-(\sigma+\alpha)\infty} \underbrace{e^{-j(2\pi f+\beta)}}_{\text{永遠在單位圓上}} - 1 \right]$$

$$= \frac{-1}{a+s} \left[0 - 1 \right],$$ 當 $\sigma + \alpha > 0$

$$e^{-(\sigma+\alpha)\infty} = 0$$

$$= \frac{1}{s+a},$$ R.O.C.: $Re\{s\} > -Re\{a\}$

(2)

$$h(t) = \delta(t)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-s\cdot 0}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt$$

$$= 1 \; ,$$ R.O.C. : All s-plane

(3)

$$h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(t)\, e^{+st}\, ds$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(t)\, e^{+st}\, ds\right]$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(t)\, s\, e^{+st}\, ds$$

互為 Laplace Pair

$H(s) = s$, R.O.C. : All s-plane

(4)

$$h(t) = u(t)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{-1}{s}\, e^{-st}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{s}\left[e^{-s\infty} - 1 \right]$$

$$= \frac{-1}{s}\left[e^{-\sigma\infty}\, \underbrace{e^{-j2\pi f\infty}}_{\text{永遠在單位圓上}} - 1 \right]$$

$$= \frac{-1}{s}\left[0 - 1 \right], \text{ 當 } \sigma > 0$$

$$= \frac{1}{s}, \quad \text{R.O.C.}: \ \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

(5)

$$x(t) = h(t-a)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-a)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-a)\, e^{-st} e^{sa} e^{-sa}\, dt$$

$$= e^{-sa} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-a)\, e^{-s(t-a)}\, dt$$

$$= e^{-sa} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-a)\, e^{-s(t-a)}\, d(t-a)$$

$$= e^{-sa} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-as} H(s), \quad \text{R.O.C.}: R_h$$

因為在推導的過程
沒有做任何的限制
所以收斂區間相同

(b)

$$x(t) = e^{at} h(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} h(t) e^{-st} \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-(s-a)t} \, dt$$

$$= H(s-a) \quad , \quad \text{R.O.C}: \ Re\{s-a\} \in R_h$$

$$Re\{s\} \in R_h + Re\{a\}$$

(7)

$$x(t) = \frac{d}{dt} h(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{j2\pi f} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)\, e^{+st}\, ds$$

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{j2\pi f} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)\, e^{+st}\, ds \right]$$

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{j2\pi f} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)\, s \; e^{+st}\, ds$$

互為 Laplace Pair

因為推導的過程
沒有做任何假設
所以收斂區間不變

(8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, u(\tau - t)\, d\tau = h(t) * u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau = h(t) * u(t)$$

$$\mathcal{L}\left\{ \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \right\} = H(t) \times \frac{1}{s}$$

$$h(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} H(s) \qquad \text{R.O.C.} : \; R_h$$

$$u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} \qquad \text{R.O.C.} : \; Re\{s\} > 0$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} H(s)$$

$$\text{R.O.C.} : \; R_h \cap Re\{s\} > 0$$

(9)

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\frac{d}{ds} H(s) = \frac{d}{ds}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt \right]$$

$$\frac{d}{ds} H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \times (-t)\, e^{-st}\, dt$$

互為 Laplace Pair

因為在推導的過程中
沒有做任何假設
所以收斂區間不變