(1) 古典物理 vs. 量子物理

牛頓力學 + Maxwell 電磁學 = the core of 古典物理

19世紀末出現與古典物理相抵觸的 exp. ⇒ 量子物理.

Are matter and energy continuously divisible?

古典物理：Yes.

量子物理：No，大部分的物理量是 quantized (量子化的)、不連續的。

J. J. Thomson 發現 e⁻，說明原先是物質基礎的原子可再被分割，→ 中子、質子的發現，這些粒子已不可再切割，直到夸克的發現。

1909 R. A. Millikan 的油滴 exp. 証明電荷是量子化的。

表現量子性質的粒子如 e⁻ 或 EM waves 可表現古典物理行為，如在自由空間時，e⁻ 的 energy 可為任意值。但在原子尺寸空間中，古典物理圖象不再正確，如被束縛在原子中的 e⁻，energy is quantized.

Space of atomic scales → Quantum physics.

20世紀初左右的三個實驗開啟量子物理大門：

黑体輻射、光電效應與 Compton 效應、原子光譜。

(2) Blackbody radiation (黑体輻射)

加熱物体 → 發熱、發光，i.e. 輻射 EM waves：$P \propto T^4$

As $T\uparrow$，輻射出的 EM waves $\lambda\downarrow$：暗紅 → 橙 → 黃 → blue → …

黑体 = 对 EM waves 吸收率为 1 的物体 (∴是黑色)

加熱黑体使其輻射出 EM waves 稱为"黑体輻射"，e.g. Sun

羅

國立清華大學物理系(所)研究室紀錄

黑体的近似：a hollow piece of any material with a small hole.

→進入cavity的EM waves在未逸出前即被吸收.

∴ when cavity is heated，必產生黑体輻射.

黑体輻射的特徵：

(i) 輻射的EM wave波長分布 depends on T, not on the material.

(ii) Stefan-Boltzmann law: $P=\sigma A T^4$, where

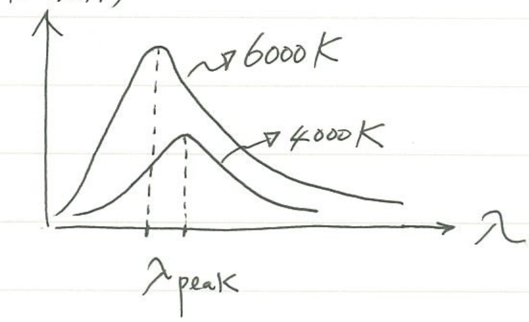
σ = Stefan-Boltzmann constant $= 5.67\times10^{-8}\ W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}$

A = 黑体輻射EM waves的總面積

T = 絕對溫度.

(iii) Wien's law: $\lambda_{peak}\cdot T = 2.9\ mm\cdot K$ （λ_{peak} = 發熱物体呈現的主顏色。）

黑体的radiance (用R表示) = 單位波長所輻射的power



∵曲線下面積 = 輻射的total power.

$\lambda_{median}\cdot T = 4.11\ mm\cdot K$

$\lambda_{median} = \frac{P}{2}$ 的分界點.

EM wave的輻射是由charged particle的加速度運動所產生.

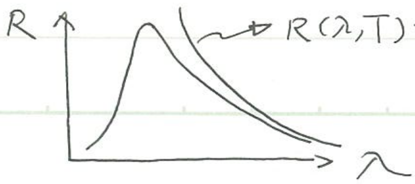
∴黑体輻射是由腔壁原子或分子的熱運動產生.

= 振動 in solid ≅ SHM

∴ T↑，黑体輻射↑.

羅

1800年代運用古典物理只能得到符合部分exp曲線(長λ段及短λ段)的theory，如Rayleigh-Jeans的紫外災難



$R(\lambda,T) = 2\pi ckT/\lambda^4$: ultraviolet catastrophe

直到1900才由Max Planck得到符合exp.曲線的公式

$$R(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT}-1)}$$, where

h = planck constant $=6.63\times10^{-34}$ J·S

k = Boltzmann constant.

Planck 以數学天份得到輻射公式後,進一步思考其物理意義時發現:

振動的 charged particles (原子或分子) 所具有的能量 is quantized, i.e. 非連續的 energy. 以其振動頻率為 f, 則其能量為 $E=nhf$, $n=0,1,2,3,\cdots$.

Note: h is so small that quantum phenomena are usually obvious only in the atomic realm.

輻射 EM wave ~ 吸收 EM wave ⇒ 振動的分子只吸收或輻射 hf 整數倍的 energy.

吸收 EM waves 的分子 jumps to 較高的能量狀態.

[之後將知道分子的振動能階 $E=(n+\frac{1}{2})hf$, not nhf]

(3) Photons

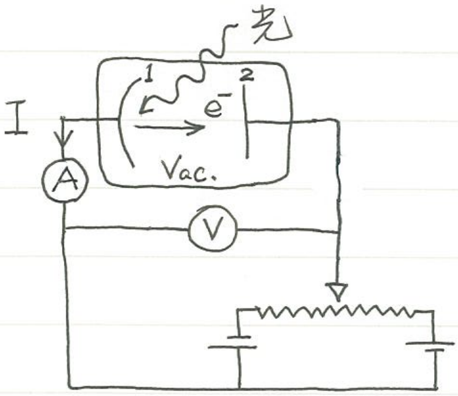
planck 証实振動的分子能將 EM waves 以 hf 的整數倍交換能量, 則 → EM wave 的 energy 是否 quantized?

○ 光電效应

1887 H. Hertz 無意間观察到 photoelectric effect (光電效应):

EM wave 照射金屬表面, 產生電子.

羅

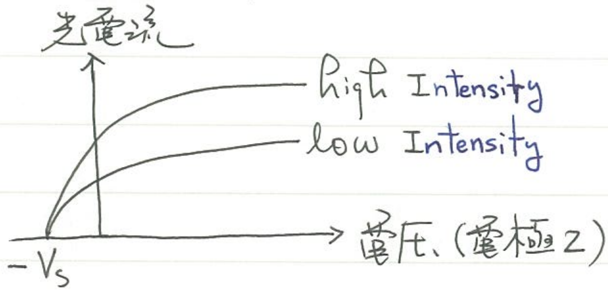


照光的電極1產生電子(即光電子)形成光電流。
在收集光電子的電極2加上夠大的負電压，使光電流為零，此時的電压，稱為stopping potential V_s (>0).

⇒ 光電子的最大動能 $K_{max} = e \cdot V_s$

古典物理預測光電效应会発生，因為 e^- 受EM wave 振盪電場的作用，運動振幅將增加到足以脫離metal surface的 binding.
但因EM wave的energy分布在整個wave中，∴尺寸微小的 e^- 須一段時間才能累積足夠的energy.
增加光的強度I，即增加EM wave的電場 $(I \propto E^2)$，使 e^- 更容易在短時間內脫離metal surface，而EM wave的frequency則對 e^- 累積能量無多大作用。

和古典物理相抵觸的exp观察：
(i) 光電流瞬間產生，even 以暗淡光照射、
(ii) V_s 和 I 無関.
(iii) 以 $f < f_{cutoff}$ 的光照射則無光電流，無論I有多大.
以 $f > f_{cutoff}$ 光照射時，$V_s \propto f$。

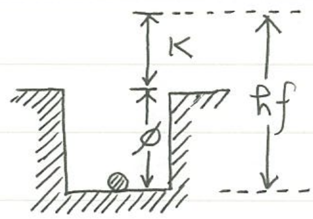


1905 Einstein 以光子(photon)成功解釋光電效應：

EM wave = 光子(~粒子)

光子的energy $E=hf$ (引用Planck的分子振動能量) 量子化

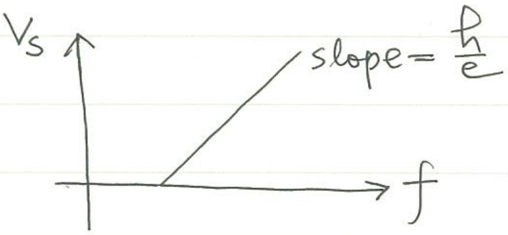
e^-一次吸收一個光子的能量、
e^-脫離金屬電極束縛的能量為
work function ϕ (為材料性質)



$\rightarrow \phi = h f_{cutoff}$。

$\therefore E = hf = \phi + K_{max} = \phi + e\cdot V_s$

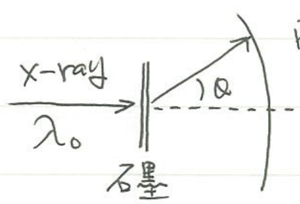
$\Rightarrow V_s = \frac{h}{e}\cdot f - \frac{\phi}{e}$ (光電方程式)



○ Compton effect：光子行為的再確認

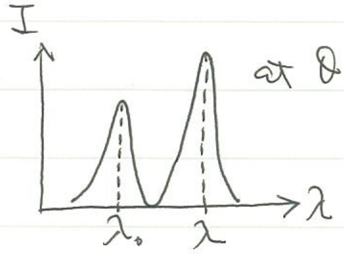
X-ray 與e^-的交互作用：古典物理圖象中，e^-受EM wave作用，產生與EM wave同頻率的振動 → e^-輻射同頻率的EM wave with max intensity ⊥ e^-的振動方向.

Compton's exp



在不同的θ測量穿過石墨的 X-ray 的 I vs. λ

得



at $\theta = 135°$

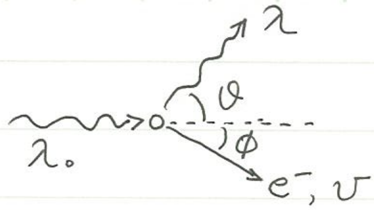
無法以古典物理解釋 $\lambda > \lambda_0$的散射 x-ray.

→ 以光子學說解釋：EM wave (x-ray) ~ 粒子，與e^-作彈性碰撞後，喪失部份能量形成λ ($>\lambda_0$).

國立清華大學物理系(所)研究室紀錄

碰撞：能量and動量守恆

散射e^-的speed很大須用相對論修正其能量與動量。



波長λ的光子 $\begin{cases} \text{能量} = hf = hc/\lambda \\ \text{動量 } p = \frac{E}{c} = h/\lambda \end{cases}$

e^-的 $\begin{cases} \text{動能 } K = (\gamma - 1)mc^2 \\ \text{動量 } p = m\gamma v \end{cases}$, where $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

能量守恆：$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda} + (\gamma - 1)mc^2$ — (a)

動量守恆：$\Sigma p_x = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda}\cos\theta + p\cos\phi$ — (b)

$\Sigma p_y = 0 = \frac{h}{\lambda}\sin\theta - p\sin\phi$ — (c)

從(a)~(c)消去v及φ得 $\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$

(see below) $\equiv \lambda_c(1 - \cos\theta) = \text{Compton shift}$

where λ_c = Compton wavelength

$= \frac{h}{mc} = 0.00243\,\text{nm}$ (or $2.43\,\text{pm}$)

---

from (b) and (c) $\begin{cases} p\cos\phi = h\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\cos\theta\right) & \text{— (d)} \\ p\sin\phi = h \cdot \frac{1}{\lambda}\sin\theta & \text{— (e)} \end{cases}$

$(d)^2 + (e)^2$:

$$p^2 = h^2\left[\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\sin\theta\right)^2\right] = h^2\left[\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{2\cos\theta}{\lambda_0\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right]$$

$\because p = \gamma m v$, $\therefore p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$ and $v^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$

$\therefore p^2 = m^2c^2(\gamma^2 - 1) = h^2[\quad]$ — (f)

from (a) $\gamma - 1 = \frac{h}{mc}\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)$

$\rightarrow \gamma + 1 = \frac{h}{mc}\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) + 2$

$\Big\}\ \gamma^2 - 1 = \frac{h^2}{m^2c^2}\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{2h}{mc}\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)$

代入(f)

得 $\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$

羅

(4) 原子光譜

1911 Rutherford 的有核原子模型：

e^- 圍繞体積極小，但質量大的正電荷核運動。

古典物理：

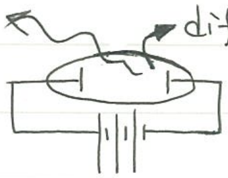
e^- 以 EM force 繞行正電核心作加速度運動 → radiate EM wave,

∴ 有核的原子模型無法存在。

(The very existence of atoms is at odds with classical physics.)

。H 原子光譜

高溫物体発射出的是連續 λ 的 EM waves，但純化的氣体經氣体放電 radiate 出的 EM waves 卻是不連續 λ，此稱為 spectral lines。



每種元素產生本身獨特的 spectral lines (氣体元素指紋)

→ 星球氣体的辨認。

1884 J. Balmer：H 的 4 條可見光 spectra lines 的波長間的關係為 $\frac{1}{\lambda}=R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)$

$n=3,4,5,6$ and R_H = H 的 Rydberg 常數 $=1.097\times10^{7}\ m^{-1}$

Later, generalized to $\frac{1}{\lambda}=R_H\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$, where

$n=m+1, m+2, m+3, \ldots$

for Balmer series, $m=2$ (可見光)
Lyman series, $m=1$ (UV)
Paschen series, $m=3$ (IR)

沒有任何 theory 可以解釋。
→ 原子模型 + QM.

Why should atoms emit discrete spectral lines?

Why should the hydrogen lines form patterns: $\frac{1}{\lambda}=R_H\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$?

→ 與原子結構有關!

國立清華大學物理系(所)研究室紀錄

(5) Bohr H atom model 與物質波 (matter wave)

○ 1913 N. Bohr 提出 H atom model 理論以解釋 H 的 spectral lines.

Model: (i) e^- 以圓形軌道繞原子核運轉, e^-–原子核為庫侖力。

(ii) e^- 的角動量 $mvr = n\hbar$, where $\hbar = h/2\pi$ and $n \in N$.

i.e. e^- 的角動量 is quantized ($\rightarrow$ e^- 的 energy is quantized)

(古典物理的圓周運動, 半徑、角動量、能量皆可為連續值.)

(iii) e^- 在允許的軌道運轉時不輻射 EM wave。(與古典物理抵觸)

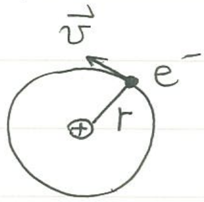
在軌道間躍遷時, 發出或吸收一個光子, 其能量為軌道間的能量差. i.e.

$$E_n - E_m = \Delta E = hf$$

E_i 為 r_i 時, e^- 的 energy = atomic energy level.

$E_i = ?$

H atom: e^- 圍繞位置固定不動的核 (proton, mass = 1836 mass of e^-), and e^- 的 $v \ll c$, ∴ 以非 SR 處理 e^- 運動.



From (ii) $mvr = n\hbar$ and 圓周運動

的向心力 $= \dfrac{ke^2}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$, m 為 e^- mass.

$$\therefore (mvr)^2 = mke^2 \cdot r = (n\hbar)^2$$

$$\therefore r = \frac{\hbar^2}{mke^2} \cdot n^2 = a_0 \cdot n^2 \equiv r_n \quad \text{(discrete radius)}$$

where $a_0 \equiv \dfrac{\hbar^2}{mke^2} = 0.053\,\text{nm}$ (Bohr radius)

$=$ 最小的軌道半徑.

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{1}{2}U \quad (\text{for } F \propto r^{-2} \text{ 圓周運動})$$

$$\therefore E = -\frac{ke^2}{2r} \quad (\text{負號表示 } e^- \text{ is bound to atom})$$

for $r = r_n = a_0 \cdot n^2$

$$\therefore E = -\frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{ke^2}{2a_0}\cdot\frac{1}{n^2}$$

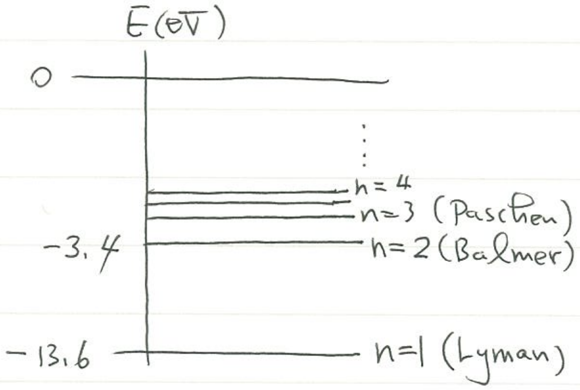
$$\Rightarrow E_n = -\frac{ke^2}{2a_0}\cdot\frac{1}{n^2} = -\frac{13.6\,\text{eV}}{n^2} \quad \text{(Bohr H atom energy level)}$$

$n = 1, 2, 3, 4, \cdots \in N$

$n=1$ — ground state, 能量最低的狀態.

$n \geq 2$ — excited state (激發態)

Ground state 的 H atom 直徑 $= 2r_1 = 2a_0 \sim 0.1\,\text{nm} = 1\,\text{Å}$



Energy-level diagram

→ 游離 (ionize) ground state 的 H atom 須 13.6 eV (為 H 的游離能)

The small discrepancy results from the approximation that the proton is stationary.

$$E_n - E_m = \Delta E \quad (\text{for } n > m\text{, emits a photon})$$

$$= \frac{ke^2}{2a_0}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda} = \frac{ke^2}{2a_0 hc}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{where } \frac{ke^2}{2a_0 hc} = 1.09\times10^{7}\,\text{m}^{-1} \sim R_H$$

∴ Bohr 的 H 原子 model 成功解釋 H 原子光譜! even 單 e^- 離子 如 He^+, Li^{2+} and Li, Na (單價金屬元素).

But, 無法解釋其他多 e^- 原子, even He 的光譜.

根源: model 中的量子化條件缺乏理論基礎

→ Quantum mechanics.

o Matter wave

在古典物理，波和粒子有明顯界線且不相容，光是 EM wave。
But Einstein 的光子學說顯示光也是粒子。

→ 被認為是粒子的 e^-, p^+ 是否也有 wave 的特性？

1923 (10 years after Bohr H model) de Broglie 主張如果光波具有粒子特性，粒子如 e^- 或 p^+ 也應具有波動特性。

光: $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$ λ: wavelength 專屬於 wave
p: 動量，專屬於 particle.

de Broglie 主張此關係亦適用於 particles

∴ de Broglie wavelength $\lambda = \frac{h}{p}$.

De Broglie 用 e^- 的波動性質解釋 Bohr model 中 e^- 的角動量 is quantized:
e^- 在允許的軌道上形成 standing wave, ∴ energy 不會 lose.

Standing wave 條件:

則 $L = \frac{\lambda}{2} \times n$ ($n \in N$)

視 L 為 e^- 軌道的圓周長 $2\pi r$ (A, B 相連接) 則

$$L = 2\pi r = n\cdot\lambda \quad (\text{駐波條件})$$
$$= n\cdot\frac{h}{p} = n\cdot\frac{h}{mv}$$
$$\Rightarrow mvr = n\cdot\frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (\text{Bohr model 中的量子化條件})$$

羅

1927 証實 e^- 的波動性質: 低能量電子繞射 (LEED) by Davisson and Germer。

(6) The uncertainty、complementarity and correspondence principles.
(互補、互斥) (相當、一致)

○ Uncertainty principle (不準確原理)

古典物理：準確地知道粒子的 $(\vec{r}, \vec{v})$ 就能預測粒子的行為。
量子物理：No!
無法同時任意準確地量測(→知道)某些pair的物理量。
粒子的 $(\vec{r}, \vec{p})$ 為其中的一個pair.
W. Heisenberg's uncertainty principle: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ $\left(\frac{\hbar}{2}、h \text{ or } \frac{h}{2}\right)$

→ 如可以測量粒子的位置(即x)準確到誤差為 Δx，則無法同時測量粒子動量p準確到誤差 Δp 小於 $\hbar/\Delta x$, i.e. p的最小誤差 Δp 只能到達 $\hbar/\Delta x$.

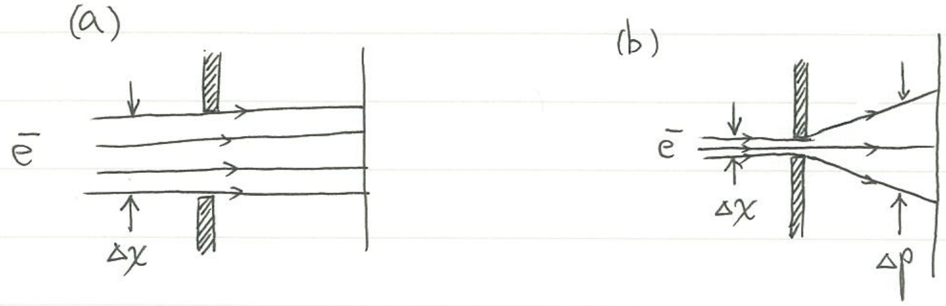
Why? ⇒ Quantization!

測量particle的位置或動量：照光.
但照光对particle輸遞energy，扰動particle，使測量失準.
古典物理：energy可任意小到形成的扰動可忽略.
量子物理：最小的energy為一個光子所帶energy，不能任意小。
(i) use low-energy photon (photon的動量、f are low) 使傳輸給particle的動量降低，則particle的 $\Delta p \downarrow$。
但 low-f 表示 λ is long，則空間解析度降低 (diffraction limit: Section 32.6)，造成量測particle位置的誤差 $\Delta x \uparrow$.
(ii) 如果使用短λ的photon (→高動量、高能量光子) 以使 $\Delta x \downarrow$，但傳輸給particle的動量增加，使particle的 $\Delta p \uparrow$。

$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ quantifies this trade-off.

羅

Uncertainty principle 和物質波有密切關聯：



(a) 用一束 e^- 通過較寬的 slit，則 e^- 在垂直方向上的位置誤差 Δx
(= slit 寬度) 較大，但 e^- 在垂直方向上的動量誤差 Δp 較小。
(繞射現象不明顯)

(b) 用較窄的 slit 可以減小 Δx，但此時繞射現象 (wave 特性)
較明顯，∴ Δp 增大。

So the wave nature of matter ultimately imposes a trade-off:
The more we know of a particle's position, the less we know of its momentum, and vice versa.

另一對無法同時任意準確測量的物理量為 Energy–time pair：

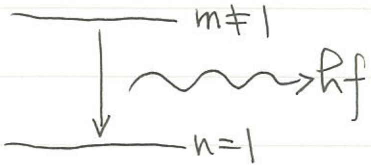
$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta p \cdot \Delta t$$
$$= v \cdot \Delta p \cdot \Delta t$$
$$= \left(\frac{p}{m} \cdot \Delta p\right) \cdot \Delta t$$
$$= \Delta E \cdot \Delta t \qquad \left(\because E = \frac{p^2}{2m},\ \therefore \Delta E = \frac{1}{2m} \cdot 2p \cdot \Delta p = \frac{p}{m} \cdot \Delta p\right)$$

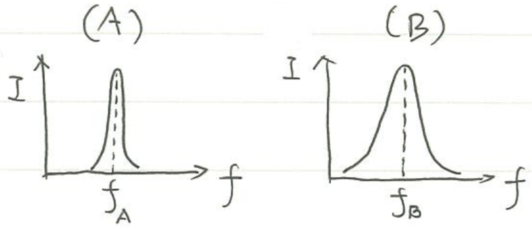
E: the energy of a system

t: the time the system remains at energy E.

例如一個原子可以永久處於一個固定能量狀態，則可用無限長的時間測量此能量，使 ΔE 無限小。而一般處於 excited state 的原子的 lifetime $\sim 10^{-8}$ sec，表示測量此 excited state energy 的時間有限，∴此 energy level 有一個 min 誤差

$$\Delta E = \hbar / \text{lifetime}$$





則 lifetime of excited states A、B : $\tau_A > \tau_B$.

國立清華大學物理系(所)研究室紀錄

○ Complementarity principle (互補原理)

量子物理中最令人困惑的就是一波動-粒子双重性(duality):

光與物質皆有波動及粒子性質。(even 連 Heisenberg 也感困惑)

互補原理: Bohr 对波-粒双重性的詮釋

波動與粒子是相同物体的兩個互補性質.

如果進行 e^- 繞射实驗則測到的是 e^- 的波動行為,非粒子行為.

但如果進行 e^- 位置的观察 如 e^- 感光板上的光點, 則不会看到 e^- 的波動行為。

這兩種量測需要不同的 exp. 裝置, 因而無法同時观察到 e^- 的 wave 及 particle 行為。所以如果問「e^- 到底是 particle 還是 wave?」

The answer is 兩者皆是, 而我們所观察到的 e^- 行為完全視我们進行何種 exp. 而定。

○ Correspondence principle (相當原理)

古典物理真的錯了嗎? 無法與量子物理相容嗎? $\Rightarrow$ No!

Bohr's 相當原理:

When 量子效应不明顯時, Quantum physics $\to$ classical physic.

量子效应: 空間、$\hbar$、Energy level。原子空間 $\to$ 大、$\hbar \to 0$, 連續 E.

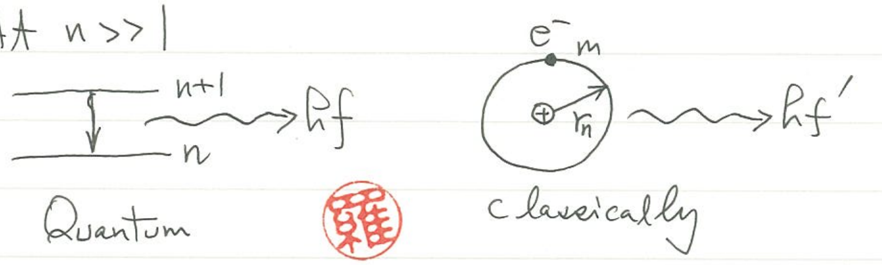
(i) As $h \to 0$, planck 公式 $\to$ Rayleigh–Jeans (problem 68)

$$\text{planck}: R(\lambda,T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

$$\text{As } h \to 0,\ e^{hc/\lambda kT} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$$

$$\therefore R(\lambda,T) \approx 2\pi c \cdot kT/\lambda^4 = \text{Rayleigh-Jeans}.$$

(ii) At $n \gg 1$



$\Rightarrow f = f'$ when $n \gg 1$.

Quantum:

$$f=RC\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]\cong\frac{RC}{n^2}\left[1-\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]=\frac{2RC}{n^3}\quad \text{where } R=\frac{ke^2}{2a_0hc}\sim R_H$$

for $n\gg1$, $|E_n|\cong|E_{n+1}|$

$$\because |E_n|=hf=\frac{hRC}{n^2}\Rightarrow\frac{1}{n^3}=\left(\frac{|E_n|}{hRC}\right)^{3/2}$$

$$\therefore f\cong\frac{2RC}{n^3}=2RC\left(\frac{|E_n|}{hRC}\right)^{3/2}\quad \text{代入}R$$

$$\rightarrow f=\frac{1}{\pi ke^2}\sqrt{\frac{2}{m}|E_n|^3}.$$

Classically, $f'=\frac{1}{T}=\frac{v}{2\pi r_n}$

$$E=K+U=\frac{1}{2}U=-K$$

$$\left.\begin{array}{l}\because \frac{1}{2}mv^2=|E|\rightarrow v=\sqrt{\frac{2|E|}{m}}\\ \frac{ke^2}{2r_n}=|E|\rightarrow\frac{1}{r_n}=\frac{2|E|}{ke^2}\end{array}\right\} f'=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{r_n}\cdot v=\frac{1}{\pi ke^2}\sqrt{\frac{2}{m}|E|^3}$$

$\boxed{\text{Example 34.1}}$ 黑体輻射：白熾燈泡 (incandescent lightbulb)

白熾灯泡的灯絲由W製成，點亮時灯絲的溫度為3000K，視其為黑体，則 (a) 3000K時的 $\lambda_{peak}=?$ (b)比較可見光中間波長550nm和 λ_{peak} 的輻射功率 $R=?$

(a) $\lambda_{peak}\cdot T=2.898\ \text{mm}\cdot\text{K}$, $\therefore \lambda_{peak}=\frac{2.898}{3000}\text{mm}=966\ \text{nm}\in IR$.

(b) $R(\lambda,T)=\dfrac{\text{constant}}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT}-1)}$, at 3000K, $\dfrac{R(\lambda)}{R(\lambda_{peak})}=\dfrac{\lambda_{peak}^5(e^{hc/\lambda_{peak}kT}-1)}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT}-1)}$

for $\lambda=550\text{nm}$ and $\lambda_{peak}=966\ \text{nm}$, $\dfrac{R(550\text{nm})}{R(966\text{nm})}=0.38$

∴白熾灯輻射可見光的效率低 → 淘汰。

但発IR的效率高 → 保溫效果好。

羅

$\boxed{\text{Example 34.3}}$ Big atoms

星際空間的 H atom 常處於高激發狀態 (Rydberg states)，其大小可達 μm (Rydberg atoms)。

(a) n=273 state 的 H atom 直徑=?

(b) n=273 → n=272 所轉移射出的波長=?

(a) $r_n = a_0 \cdot n^2$，∴ n=273 激發態的 e^- 軌道直徑為 $2a_0 \cdot (273)^2 = 7.9\,\mu m$

(b) $\lambda = \left[R_H\left(\frac{1}{272^2} - \frac{1}{273^2}\right)\right]^{-1} = 92\text{ cm}$ — Radio waves.

$\boxed{\text{Example 34.4}}$ 微電子學 (microelectronics)

常用 Al atom dopes 半導体晶片以設定其電性、設 Al atoms 的速率誤差為 0.2 m/s，則其位置誤差為何? (或位置準確度為何?)

$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$

Now $\Delta p = m \cdot \Delta v = (26.98\,u) \cdot (1.66 \times 10^{-27}\,kg/u) \cdot 0.20\,m/s = 9 \times 10^{-27}\,kg \cdot m/s$.

∴ $\Delta x \geq \hbar/p = h/2\pi p = 12\,nm$ ⇒ 位置最準到 12 nm.

∴ Uncertainty principle 是製造微小電子構造的天然限制。

$\boxed{\text{Example 34.5}}$

用測不準原理估計 (a) 局限在 0.1 nm (原子尺寸) 的 e^-，(b) 局限在 1 fm (原子核大小) 的 proton 的可能最低能量.

Δx = 粒子被局限的尺寸。from $\Delta p \rightarrow p \rightarrow E$，∴ Δp = ?

設粒子的動量大小為 p，因 $\vec{p}$ 具方向，∴ $\vec{p}$ 可能向右 or 向左 ⇒ 動量的不確定量為 $\Delta p = p - (-p) = 2p$。

∴ $\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \rightarrow p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \rightarrow K \geq \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2$ (非 SR)

∴ (a) $K \geq \frac{1}{2m_e}\left(\frac{\hbar}{2 \times 0.1\,nm}\right)^2 \sim 1\,eV$

(b) $K \geq \frac{1}{2m_p}\left(\frac{\hbar}{2 \times 10^{-15}}\right)^2 \sim 5\,MeV$.

羅