1. light speed c and ether

- Maxwell's EM theory: "a crowning achievement of physics to understand the nature of light, but also leading to baffling question and contradictions that shook the root of physics."

"Relativity resolved these contradictions and altered our fundamental understanding of physics, also its influence spilled over into all areas of human thought."

- Speed c relative to what?

Maxwell EM theory: EM waves travel in vacuum with speed c.

→ But speed c relative to what?

In mechanical waves (string waves, sound wave, water wave, ..),

wave speed = the speed relative to medium in which the wave is a disturbance.

What about light? → ether medium (19-th century)

∴ ether properties: ① 充滿整個宇宙.

② 不对物質運動產生影响, 否则行星無法穩定存在.

③ very stiff 以便能快速傳播光達 speed c

⇒ A rather impossible substance, 且 Maxwell EM theory 只在 ether frame 才正確, i.e. ether frame 是一個 absolut rest frame. 但 ether frame 違反 Galilean relativity: all 力学定律在所有的慣性 frames 都正確.

羅

但沒有ether就無法回答"speed c relative to what?"

→ detect ether

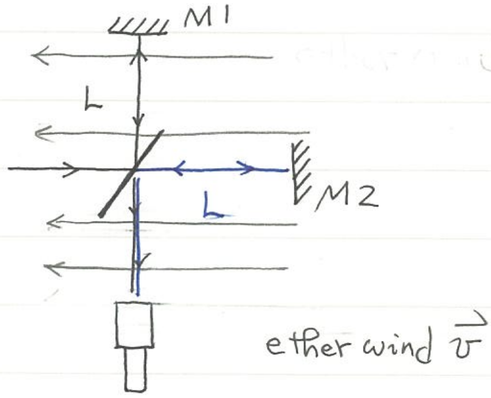
○ Search ether:

如果有ether，則地球的運動將造成在不同的方向測量到不同speed的光速，且在不同的季節也會測到不同的光速。

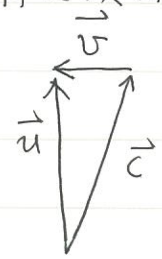
1881~1887 Michelson-Morley 實驗

Michelson干涉儀的擺設

假設如跟ether wind的方向如右圖.



如果ether存在，為使垂直方向的光束能自M1垂直入射再反射，入射光須偏轉如右圖



∵ ⊥方向行走2L的時間為 $\frac{2L}{u} = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \equiv t_\perp$

平行ether wind行走2L的時間為 $\frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \equiv t_\parallel$

∵ $t_\parallel > t_\perp$ ⇒ 長時間觀察(或改變方位)，ether wind的方向會改變，∴將觀察到干涉圖形起變化.

結果 ⇒ 長時間及不同方位皆沒發現不同的干涉圖形.

⇒ Earth does not move relative to the ether.

⇒ Ether 不存在!

羅

1905 — Special relativity by Einsten :
ether is a fiction, and the light speed c is
respect to anyone who care to observe it.

The priciple of relativity :
The laws of physics are the same in all
inertial reference frames (IRFs).

→ 在 IRFs，所有力學定律皆正確，相同 (Galilean relativity)
，而 Einstein 的相对論擴展到"所有物理定律"，包含力學
和電磁學。

∴ EM wave 的傳播 speed 在所有的 IRFs 都是 c ⇒ 解釋
Michelson-Morley 的实驗：無論地球的 speed 相对於任
何物体，地球上各方向測得的光速皆為 c，∴ 干涉圖形
不會有任何變化。

羅

2. Space and time in relativity (指的是SR)

$\text{人} \rightarrow v$ $(\Delta x', \Delta t')$

人 $(\Delta x, \Delta t)$

☼ 兩者測量光速 $= \frac{\text{distance}}{\text{time}}$ 皆得到相同值 c, i.e. $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

How can this be? 車子的移動有無可能影響計時器的運作?

→ No, all physics laws are the same in IRFs.

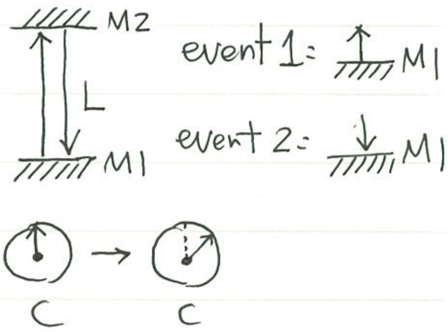
說車子是行進中,行人是靜止的一是 meaningless. ∵在SR中是沒有絕對靜止這件事的.

兩個觀察者測量到不同的物理量 (e.g. distance and time), 這些物理量與觀察者的IRF有關, 且變化的方式使他們測得的光速皆為c. ("Those quantities differ in just the right way to make the light speed come out the same for both observers.")

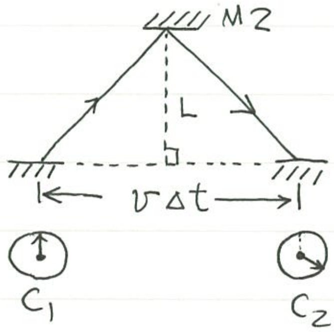
○ Time dilation: 光鐘實驗

將光鐘置於 S' IRF, S' 以 v 向右相對於 S. S' 及 S 上的觀察者分別測量 Event1 及 Event2 的時距 $\Delta t'$ 及 Δt.

光鐘:



S'測量的事件時距 $\Delta t' = \frac{2L}{c}$ —①



S: Event1 與 Event2 發生不同的地點, ∴需要2個同步時鐘 C_1 及 C_2 分別置於事件發生處, 在 Event 1 發生時"同時"啟動.

測得的時距 Δt and $\Delta t \cdot c = 2\sqrt{L^2 + (\frac{1}{2} v \Delta t)^2}$

∴ $\Delta t^2 (c^2 - v^2) = 4L^2$ 代入①, 消去 L, 得

$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ....(33.3)

羅

$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $(\leq \Delta t)$ 即為 time dilation，$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $(\geq \Delta t')$

$\Delta t'$: proper time（事件的最短時距）

proper means proprietary（專屬的，專有的）

∵ 在 S' 所量得的時距專屬於一個 clock.

但在 S 是由 2 個 clocks 所量得的時距無法專屬於某一個 clock.

Time dilation 表示：一個 IRF 中所量取的事件最短時距是在事件發生在相同地點時、

(Time dilation: time interval between two events is shortest in an IRF in which the two events occur at the same place.)

有時会聽聞 "moving clock runs slow"，此乃違反 SR 的精神，因為在 SR 中並無誰動誰靜這回事。事实上，沒人可以聲稱自己是靜止，而别人是在移動狀態。

When $\frac{v^2}{c^2} \to 0$, SR → Newtonian；只有在 $v \sim c$，相对論效応才会彰顯，如 Muons 的例子。

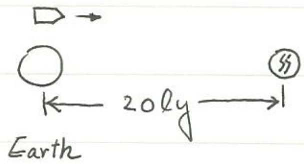
羅

o 双生子矛盾(twin paradox)

双生子,一人留在Earth,一人搭0.8C的太空船前往20 ly的星球,
再以相同的speed返回Earth,比較两人的年紀。

⊛ Event 1:離開Earth ; Event 2:返抵Earth.

太空船上為proper time $\Delta t'$; Earth者為Δt



$\frac{1}{2}\Delta t = \frac{20\,ly}{0.8C} = 25\,y$ ∴ $\Delta t = 50\,y$.

$\frac{1}{2}\Delta t' = \frac{\Delta t}{2}\sqrt{1-\left(\frac{0.8C}{C}\right)^2} = 15\,y$, ∴ $\Delta t' = 30\,y$.

∴太空旅行的双生子比留在地球的兄弟年輕20 y.

Paradox:

從太空船上看地球,比地球上看太空船的相对運動完全相同,
為何不是地球上的双生子兄弟比較年輕?

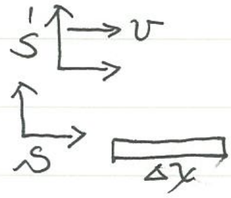
Point:不同的IRF測量到不同的時距。地球frame一直不變,
但離開和返回以0.8C相对於地球運動的spaceship則
是另外的IRF。两者的非对稱事件為:太空船的回程產生
運動改變量,而地球沒有。
如果沒有回航,則两者的对稱性相同,但也因此無法比較
年紀。(Note:回航須有加速度的產生).

羅

0 Length contraction

長度 = 速率 × 時距：在 S 及 S' 兩個 RFs 都成立。(SR's principle)

Δx 的長度在 S 上，



在 S 的測量長度

$\Delta x = v \times \Delta t$

在 S' 的測量長度

$\Delta x' = v \times \Delta t'$

地球：$\Delta x = v \cdot \Delta t = 0.8c \cdot 25y = 20\ ly$

spaceship：$\Delta x' = v\Delta t' = 0.8c \times 15y = 12\ ly$

$\because\ \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，$\therefore\ \Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ (\le \Delta x)$

$\Delta x'$ = 以 v 等速運動的RF所測量的長度 (兩點距離或物体大小)

Δx = the distance in an RF at rest w.r.t. the two objects.

(proper length?)

$\Delta x \ge \Delta x'$ ⇒ the distance is greatest in the so-called "rest frame."

⇒ length contraction (只有在相对運動的方向上發生)

(An object is longest in its own rest frame)

3、"同時性"(simultaneity)是相对的.

光鐘的例子

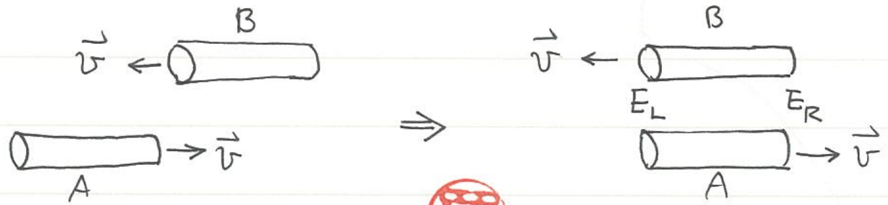
在 S "同時"啟動同步時鐘 C_1 and C_2，在 S' 看來並非是同時：

C_2 發出的光比 C_1 晚到達 S' 的觀測者，i.e. S' 認為 C_2 較晚啟動，

∴ S' 看到 S 量到比較長的時距

課本的例子：

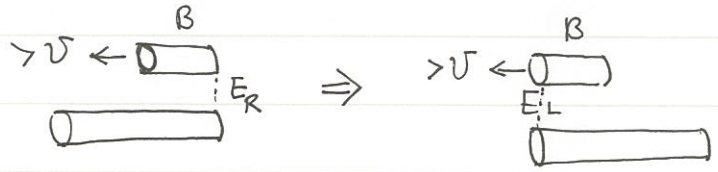
相同長度的 A, B rods，在 S frame 上觀察，



在 S 上可看到左右頭尾"同時"重合的時候。但在 A、B 上的觀察呢？

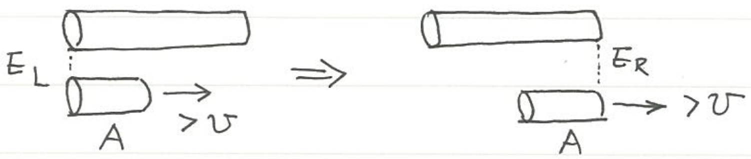
雜

A frame



Event E_R first, then E_L occurs.

B frame



Event E_L first, then E_R occurs.

Both 都不是"同時"重合!
且 E_L、E_R 發生的順序在不同的 IRFs 可以不同!

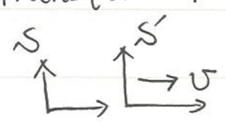
⇒ 因果關係可以顛倒嗎?

No! see later in Lorentz transformation.

4. Lorentz transformation.

Event 的測量含時、空兩部分, from time dilation、length contraction、ordering of events, we know 時、空座標是相連結、互相影響的。

不同的 RFs 間時、空座標間的關係: Lorentz transformation



Assume event 在 S 及 S' 的觀測量為 (x, y, z, t) 及 (x', y', z', t'), 其關係為何?

non-SR (Galilean transformation):

$$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z \text{ and } t' = t$$ (在 $t = t' = 0$ 原點重合)

羅

non-SR means $v \ll c$,

$\therefore$ in SR we want $x' = \gamma(x - vt)$ —①

Similarly $x = x' + vt'$ in non-SR

$\therefore$ in SR $x = \gamma(x' + vt')$ —②

where $\gamma \to 1$ when $v \ll c$.
$\Rightarrow \gamma = ?$

Assume E_1: $(x=0, t=0)$ in S and $(x'=0, t'=0)$ in S'.

E_2: 一段時距後，從原點(設S的原點)發出的光為S、S'的觀察者所測量，則

$x = ct$ 且 $x' = ct'$ —③ (SR的principle)

i.e. $ct = x = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c+v)$ —④

$ct' = x' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v)$ —⑤

④×⑤ $c^2 tt' = \gamma^2 tt'(c^2 - v^2)$

$$\Rightarrow \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

(check γ: as $v \ll c$, $\gamma \to 1$)

$(x' \Rightarrow x)$

$\therefore x' = \gamma(x - vt)$

$y' = y$ (y,z方向⊥運動方向，∴沒有長度收縮)

$z' = z$

from② $t' = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\gamma} - x'\right) = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\gamma} - \gamma x + \gamma v t\right)$ (from①)

$= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$ (check: as $v \ll c$, $\gamma \to 1$, $\frac{v}{c^2} \to 0$ $\therefore t' \to t$)

$x \Rightarrow x'$ by changing v with $(-v)$.

羅

因果關係会顛倒嗎?

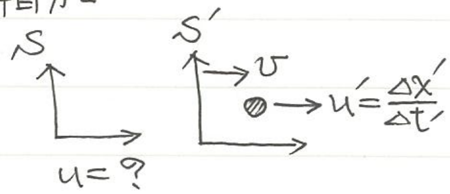
設S中，E_1和E_2發生在不同位置，且E_1為因，E_2為果，即E_1先，E_2後，則在S'兩事件的 $\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$ where $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$.

設因果間的傳播speed為 $u = \Delta x / \Delta t$，則 $\Delta t' = \gamma \Delta t\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \gamma \Delta t\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)$

$\Rightarrow \Delta t' \geq 0$ because $uv \leq c^2$,

$\therefore$ 果因不会顛倒! (但無因果關係的独立事件就有可能，如page 8)

○ 速度相加



$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\gamma(\Delta x'+v\Delta t')}{\gamma(\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x')}=\frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}}=\frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}$$

$u\to u'+v$ as $vu'\ll c^2$.

Replace v by $(-v)$ to derive

$u'=\frac{u-v}{1-\frac{vu}{c^2}}$, and $u'\to u-v$ as $vu'\ll c^2$.

○ Is everything relative?

No, 物理定律不是相对的, i.e. 在 every IRF 上, 物理定律是 invariant。真空的光速也是。

另一個是 spacetime interval, 即 4D 的 distance.

(~向量的大小不因空間 frame 的選擇而有不同值!)

$(\Delta S)^2=(c\cdot\Delta t)^2+(i\Delta\vec{r})^2$ where $i^2=-1$ (非欧式几何空間, non-Euclidean)

$\quad=(c\cdot\Delta t)^2-[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2]$

ΔS 在 S 及 S' 都有相同值 (prob. 61)

$\Rightarrow$ ΔS is invariant or ΔS is an invariance.

4D distance = 4D vector 的大小

4D vector (4-vector) = time + space

時間及空間都是 4-vector 的分量, 向量分量会因 frame 的選擇而異, 但 vector 的大小则不会。

另有其他 4-vectors, ~~如~~ current density, wave vector, potential and energy-momentum 4-vector (→ later).

5、Energy and momentum

○ momentum

能量和動量皆是velocity的函數，在SR中如果繼續使用古典的動量定義 $\vec{p}=m\vec{u}$，則動量在不同的IRFs將不守恆，

⇒重新定義momentum

對新定義的動量必須 ① 在 $u \ll c$ 時和古典定義相同.

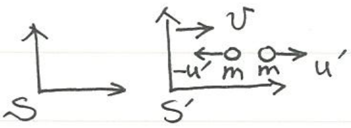
② 在all IRFs，動量皆守恆、

New definition: $\vec{p}=\gamma m\vec{u}$ where $\gamma=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

① as $u \ll c$, $\gamma \to 1$ ⇒ $\vec{p} \to m\vec{u}$.

② check momentum 守恆:

simple case:



then total 動量 in $S' = \gamma m(-u'+u') = 0$

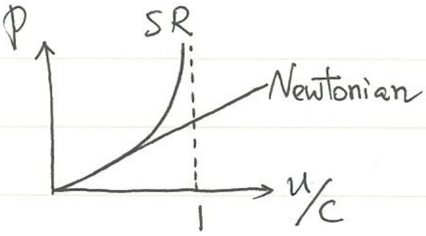
in S, for → velocity $u_1=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}$

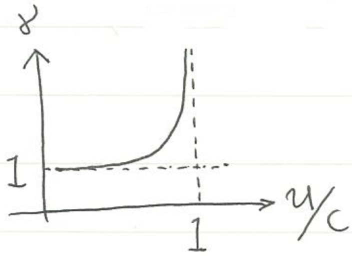
for ← velocity $u_2=\frac{-u'+v}{1-\frac{u'v}{c^2}}$

total 動量 in $S=\gamma m(u_1+u_2)$
$= \cdots = 0$

$\gamma=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ = relativistic factor

and





$\because \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$, $\therefore$ as $u \to c$, $F \to \infty$

⇒ 加速粒子($m \neq 0$)到光速 is impossible.

o Energy and mass

In 1D work-energy theorem (ch6): $W=\Delta K=K$ (if $K_i=0$)
設 $F=\frac{dp}{dt}$ 对 m 作功 from $(x_1, u=0)$ to (x_2, u), then

$$W=K=\int F\,dx=\int \frac{dp}{dt}\cdot dx \quad \left(\text{where } \frac{dx}{dt}=u, \therefore dx=u\cdot dt\right)$$

$$=\int \frac{dp}{dt}\cdot u\cdot dt$$

$$=\int \frac{m\cdot\frac{du}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\cdot u\cdot dt \quad \left(\because \frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma m u)=\frac{m}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\cdot\frac{du}{dt}\right)$$

$$=\int_0^u \frac{mu\cdot du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-mc^2$$

i.e. $K=\gamma mc^2-mc^2$

$\Rightarrow$ $\gamma mc^2=K+mc^2=$ total energy E

when $u=0$, $E=mc^2=$ rest energy

$=$ 粒子在靜止時 $(u=0)$ 的能量.

即 質量與能量等價 $E=mc^2$

比例常数 $c^2=9\times10^{16}$ J/kg.

羅

Check K by low speed $u\ll c$:

$$K=mc^2(\gamma-1)=mc^2\left[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right]$$

$$=mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4}+O\left(\frac{u^6}{c^6}\right)-1\right]$$

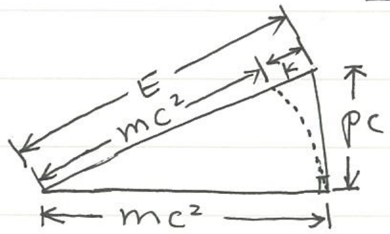
$$\simeq mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}-1\right]=\frac{1}{2}mu^2=\text{classical } K.$$

○ 能量 vs. 動量

Classically, $K=\frac{p^2}{2m}$, how about that in SR?

$$\begin{cases} p=\gamma m u \\ E=\gamma mc^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{E}=\frac{u}{c^2},\ \therefore u=\frac{pc^2}{E}\ \text{代入}\ E^2=\gamma^2(mc^2)^2 = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}\cdot(mc^2)^2$$

$$\Rightarrow E^2=p^2c^2+(mc^2)^2$$



as $u=0$, $(p=0)$, $E=mc^2$

as $u\to c$, rest energy 可忽略, ∴ $E=pc$ — 光子E和p的關係,
$(\gamma\to\infty)$ 光子: mass=0, 以c行進。

$(mc^2)^2=E^2-p^2c^2$: energy and momentum 是4-vector 的分量, and mc^2 is invariant, i.e. the mass m is invariant.

羅

$$E^2=\gamma^2(mc^2)^2=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}(mc^2)^2 \quad \left(\text{代入}\ u=\frac{pc^2}{E}\right)$$
$$=\left(1-\frac{p^2}{E^2}c^2\right)^{-1}(mc^2)^2$$
$$=\frac{E^2}{E^2-p^2c^2}\cdot(mc^2)^2$$
$$\therefore E^2=p^2c^2+(mc^2)^2$$

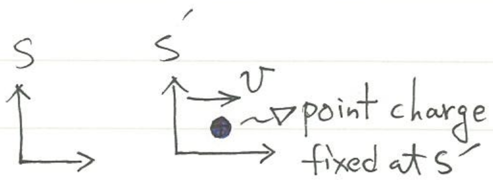
$E=\gamma mc^2=K+mc^2$

∵ when $u\to c$, $\gamma\to\infty$, ∴ in E the rest energy mc^2 可忽略.
∴ $E^2=p^2c^2$ ~ m=0 的情況; m=0 即光子。

6. EM theory vs. SR

Relativity is built on the premise that Maxwell's EM theory is correct in all IRFs. Unlike Newtonian physics, Maxwell's equations are correct and require no modification.

But E and B are not invariances:

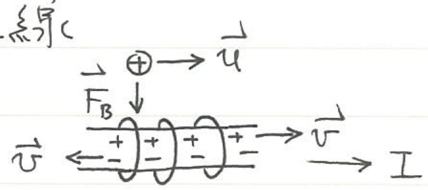


如右圖，在S'上（點電荷の rest frame），只有球狀对稱的點電荷電場，但在S上，除電場外，還会有因點電荷運動產生的磁場。

⇒ E and B 是 (4-vector)基本EB場的分量，而invariance为電荷。

例子：Figure 33.18 (cf: Benson §39.14)

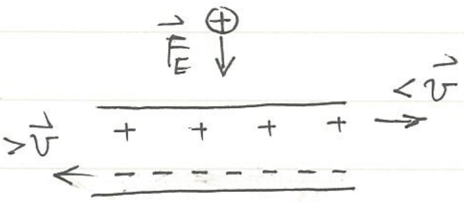
一正電荷以 $\vec{u}$ 平行有電流流動的长直導線



(i) 在導線的frame上，⊕受到電流產生的磁場作用，磁力 $\vec{F}_B$

$\vec{F}_B = q\vec{u}\times\vec{B}$。

而作用在⊕的靜電力为0，∵導線为電中性。



(ii) 在⊕的frame上，導線的正電荷向右運動的speed < v，但負電荷向左運動的speed > v，∴from ⊕上看，負電荷間的間距收縮比正電荷厲害 ⇒ wire呈現的淨電荷為負電荷，∴⊕受到向wire方向的電力 $\vec{F}_E = q\vec{E}$ 作用。但無磁力作用。

⇒ E (electricity) and B (magnetism) 並非是各自独立不相關的現象。
Rather, they are two aspects of a single phenomenon – electromagnetism.

Muon decay:

在高空,宇宙射線與大氣作用可產生速率接近c的muon,這些muon隨即decay。muon實驗是比較在2km的高山上及海平面上單位時間內所測量到的muon數目。

設muon detector的对象是0.994c的muon,單位時間為1hr.

結果1:在2km的高山上,測得的平均數目為560顆.

⇒海平面上的平均#=?

from 地面觀察者:muon走2km需花 $\Delta t=\frac{2000m}{0.994c}=6.7\mu s$,

∴依據muon的半衰期(2.2μs),在sea level上測的平均#為25顆。

but, 6.7μs是Earth frame所測得,在muon frame,因time dilation,行走2km的時間為

$\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=(6.7\mu s)\times\sqrt{1-0.994^2}=0.73\ \mu s$

∴在sea level的平均#為414顆

結果2:

在sea level的平均#=400顆.

25 vs. 400的結果只能以SR效應解釋.

羅

→ length contract:

在muon frame,高山以0.994c迎面而來,∴muon看到的高山頂到sea level的距離 $=2000m/\gamma\cong 218m$,

只需 $\frac{218\ m}{0.994c}=0.73\ \mu s$ 就能走完!