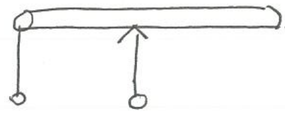
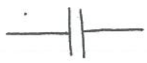
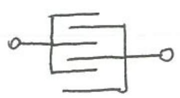
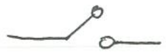
(1) 電路符号和電動勢 (electromotive force, 簡稱 emf, 用 ε 表示)

電阻：，可变電阻： (variable R)，如以導線的長度变化，∵ $R=\rho\frac{L}{A}$ ⇒ 

電容：，可变電容：

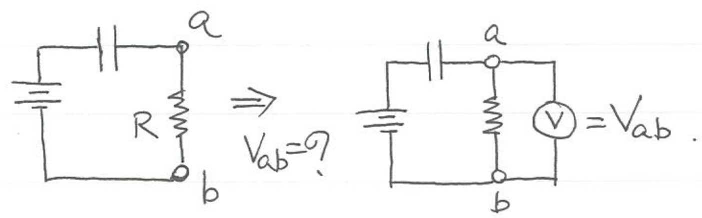
 $C=\frac{\epsilon_0 A}{d}$ changing A 達到 variable。

 : switch

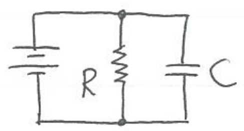
 : Ground，接地點，電路中電壓的參考零點 (電位差的參考點)

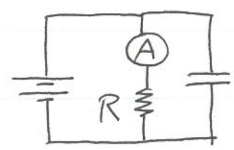
 : fuse (保險絲)

Voltmeter (伏特計)：—Ⓥ—，用於測量電路中兩點間的電位差(即電壓)，∴和「兩點間」並聯。



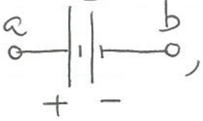
Ammeter (安培計)：—Ⓐ—，用於測量電路中流動的電流，∴和電路串聯使用。



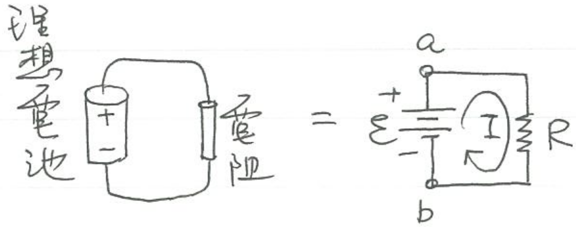
流經R的電流? ⇒ 

emf：converts 電能除外的能量 into 電能 by separating 正、負電荷
以維持一個固定的電壓 ΔV。

$\therefore [emf] = V$ (volt)

最常見的 emf source 為電池，電路符號：，用 $\mathcal{E}$(V) 標示大小。

在 a, b 兩個端點維持固定的電壓 $\mathcal{E}$, Note, a 點的電位 > b 點 ($\because$ 正電荷在 a 點).

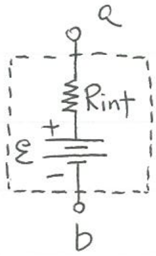


單位時間 Δt 內, ΔQ 經過 R 後降低 $\mathcal{E}$ 的電位

$$\because \quad V_a - IR = V_b \quad \therefore V_a - V_b = IR = \mathcal{E}$$

An ideal emf 沒有內電阻。

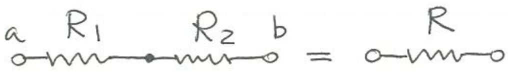
Real emf 則有內電阻，$\therefore$ terminal voltage ($=V_{ab}$) 來標示電壓、



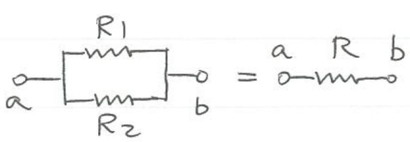
$\Rightarrow V_{ab} < \mathcal{E}$，能提供的 max. $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_{int}}$

R_{int} = 內電阻 、

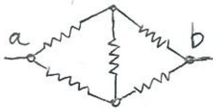
(2) R 的串、並聯

串聯： $\Rightarrow R = R_1 + R_2$

$R = \sum_i R_i$, $R > R_i$

並聯： $\Rightarrow \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

$\dfrac{1}{R} = \sum_i \dfrac{1}{R_i}$, $R < R_i$

但並非都是如此單純, e.g.  =  $R=?$

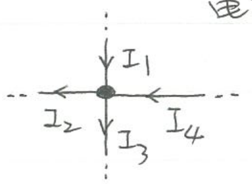
(problem 25.67)

⇒電路分析.

(3) 電路分析: kirchhoff laws

(i) 電荷守恆: node(結點) rule ⇒ $\sum I_i = 0$. (node?)

進入和離開電路中某一 node 的電流代數和 = 0

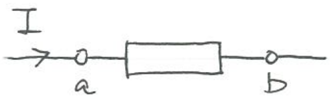


⇒ $I_1 + I_4 - I_2 - I_3 = 0$

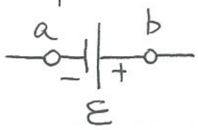
(ii) 能量守恆: loop rule (迴路規則) ⇒ $\sum \Delta V_i = 0$

在一封閉迴路上, 所經過之電位變化的代數和 = 0

ΔV_i = i-th 電位的變化 (change in potential):

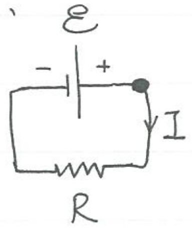


loop方向沿著 I 流動方向經過被動(passive)元件, 如 R、C、L(電感) 則電位下降: $V_a > V_b$, 反 I 方向, 則電位升高。



經過emf, ∵ $V_b > V_a$, $V_b - V_a = \varepsilon$, ∴ loop方向由 $a \to b$, 則電位升高, 反之由 $b \to a$ 則降低, 和 I 方向無關.

e.g.



先賦於 I 的方向,

$$\left.\begin{array}{l}\text{For 順時針 loop: } -IR + \varepsilon = 0 \\ \text{For 逆時針 loop: } -\varepsilon + IR = 0\end{array}\right\} I = \frac{\varepsilon}{R}$$

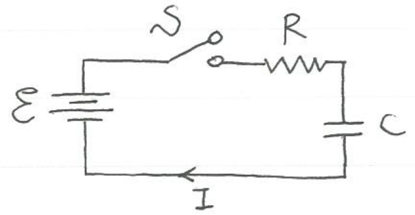
⇒Example 25.4 和此頁最上圖之R。

(4) RC電路：充電和放電

Energy is stored on C，∴ C 接上 $\mathcal{E}$，会瞬間充電(charging)：正負電荷累積在C上，充電完成的C如接通，則瞬間放電(discharging)，発出火花，正負電荷瞬間中和。

But C 接上R 時，則充、放電不会瞬間発生 ⇒ 電路上的 I 和時間的関係？

○ Charging



起始條件 ($t \le 0$)：C上没有charge，and at $t=0$, S closes, 此時的 $\mathcal{E} = I_0 \cdot R$。 ($I_0$?, $I_0 \to I$?)

As t↑，C上逐漸累積 charge → C就有電位差 V_C.

$1-e^{-1} \approx \frac{2}{3}$

$e^{-1} \approx \frac{1}{3}$

$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \text{C上的charge 由 } 0 \to Q_0 \text{ (max)}, \therefore \frac{dQ}{dt} > 0 \\ \text{C上的電位差 } V_C \left(=Q/C\right) \text{ 由 } 0 \to Q_0/C \text{ (max.)} \end{array} \right\} Q(t) = ?$

loop rule：$\mathcal{E} = V_R + V_C = IR + \frac{Q}{C}$ at time t

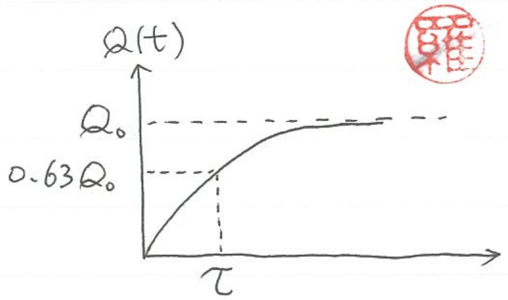
$= R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$ ⇒ 變數分離 + 積分

$\therefore \frac{dQ}{C\mathcal{E}-Q} = \frac{dt}{RC} \Rightarrow \frac{t}{RC}$ + 積分常數 $= \int \frac{dQ}{C\mathcal{E}-Q} = -\ln(C\mathcal{E}-Q)$

由起始條件決定積分常數：at $t=0$, $Q=0$, ∴ 積分常數 $= -\ln(C\mathcal{E})$

$\therefore \ln\left(\frac{C\mathcal{E}-Q}{C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow Q(t) = C\mathcal{E}\left(1-e^{-t/RC}\right)$

$= Q_0\left(1-e^{-t/RC}\right)$

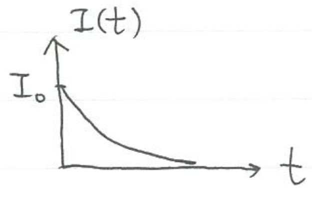


充電速度的描述量 τ：

when $t = \tau \equiv RC$ (time constant)

$Q = Q_0 (\underbrace{1-e^{-1}}_{\approx 2/3}) = 0.63\, Q_0$

$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \equiv I_0 e^{-t/RC}$

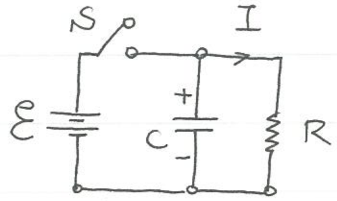


as $t \to \infty$ $I(t) \to 0$：断路

$V_C(t) = \mathcal{E} - V_R = \mathcal{E} - IR = \mathcal{E}\left(1-e^{-t/RC}\right) \Rightarrow V_C(t)$ 和 $Q_C(t)$ 的行為相同.

$\left[\text{or } V_C(t) = \frac{1}{C} Q(t)\right]$

○ Discharging



起始條件：S 關閉於 $t<0$，∴ C 充電完全，此時 C 和 R 兩端的電位差 $= \mathcal{E}$，在 C 上的 charge $Q_0 = C\mathcal{E}$ (max)。

在 $t=0$ 時，S open，則 C 開始放電產生 I.

check：C 的電荷由 max. $Q_0 \to 0$，∴ $I = -\frac{dQ}{dt}$ (>0，配合方向)

loop rule：$V_c = IR = \frac{Q}{C}$，where Q is the charge on C.

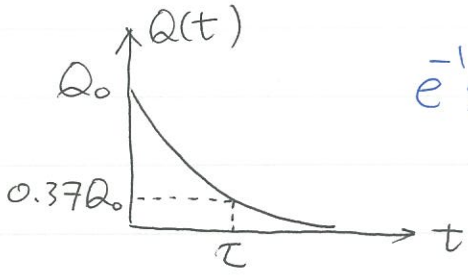
∴ $\frac{Q}{C} - IR = \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0$ (note: $I = -\frac{dQ}{dt}$)

變數分離 + 積分：$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln Q = -\frac{t}{RC} + k$ (積分常數)

at $t=0$, $Q=Q_0$，∴ $k = \ln Q_0$

$\Rightarrow \ln Q - \ln Q_0 = -\frac{t}{RC}$，∴ $Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$

描述衰減快慢的參數：



$e^{-1} \approx \frac{1}{3}$

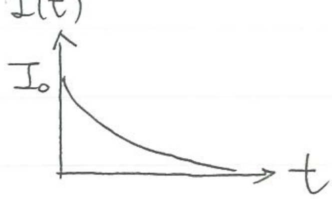
$\tau = RC =$ time constant

when $t = \tau = RC$,

$Q = Q_0 e^{-1} = 0.37\, Q_0 \approx \frac{1}{3} Q_0$

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \equiv I_0 e^{-t/RC}$$

where $I_0 = \frac{Q_0}{RC} = \frac{Q_0}{R \cdot Q_0/\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = I(t=0)$

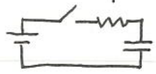
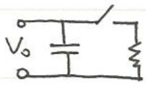


as $t \to \infty$, $I(t) \to 0$：斷路.

$$V_c(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-t/RC} = \mathcal{E}\, e^{-t/RC} \sim Q(t)$$

羅

RC 電路的短時(short-term)及長時(long-term)行為

	I	V_c	Circuit	short	long
Charging	$\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$	$\varepsilon(1-e^{-t/RC})$		C是通路	C~斷路
Discharging	$\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$	$V_0 e^{-t/RC}$		C是通路	C~斷路

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$\Rightarrow$ for $x \ll 1$, $e^{-x} \sim 1$ ($t/RC \ll 1$ ~ short-term)

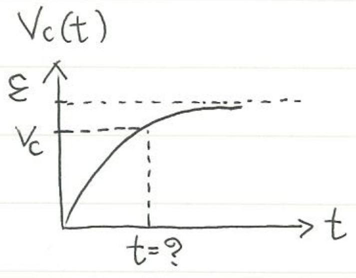
$\Rightarrow$ for $x \gg 1$, $e^{-x} \sim 0$ ($t/RC \gg 1$ ~ long-term)

In times much shorter than $\tau = RC$, V_c cannot change instantaneously. After many time constants, no I is flowing to C.

羅

Example $\boxed{25.5}$

相机的flash由150-μF的C提供energy,在$V_c \ge 170V$才能work。若150-μF的C由一個200-V的電池串聯$R = 18k\Omega$所充電,則flash間的 $\Delta t = ?$



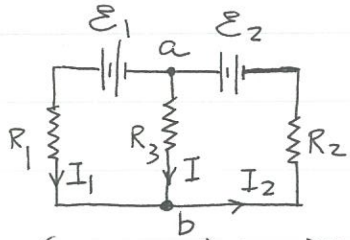
$V_c = \varepsilon(1 - e^{-t/RC})$, where $\varepsilon = 200$ V.

When $V_c = 170$ V 時, $t = ?$

$t = 5.1$ s with $C = 150 \times 10^{-6}$ F, $R = 1.8 \times 10^{4}\,\Omega$

Example $\boxed{25.4}$

如右图, $R_1=2\Omega$, $R_2=4\Omega$, $R_3=1\Omega$,
$\varepsilon_1=6V$, $\varepsilon_2=9V$, 则流过 R_3 的 $I=$?



(note, ε_2 方向和課本相反)

先標示 I_1, I_2 及 I, I 的方向可任意。

node rule: $I = I_2 - I_1$

left loop + 逆時針(使通過 ε_1 為正): $\varepsilon_1 - I_1R_1 + \overset{I}{\overset{\|}{(I_2-I_1)}}R_3 = 0$ —①

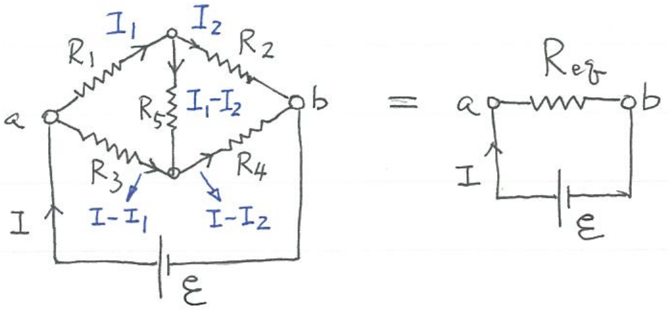
right loop + 逆時針: $\varepsilon_2 - (I_2-I_1)R_3 - I_2R_2 = 0$ —②

①、②代入 R_i 及 ε_i 數值 $\Rightarrow I_1 = \frac{39}{14}A$, $I_2 = \frac{33}{14}A$

∴ $I = I_2 - I_1 = -\frac{3}{7}A \Rightarrow$ 負號的意義: I 的方向為 $b \to a$.

(How about big loop?)

Problem $\boxed{25.67}$ (Figure 25.12 $\Rightarrow R_1=R_2=R_4=R_5$)



$R_{eq}=?$

$R_{eq} = \varepsilon / I$。利用node rule標示如圖流經 R_i 的電流.

$$\left.\begin{array}{l} \text{left loop + 順時針: } -I_1R_1-(I_1-I_2)R_5+(I-I_1)R_3=0 \\ \text{right loop + 順時針: } -I_2R_2+(I-I_2)R_4+(I_1-I_2)R_5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1=\alpha I \\ I_2=\beta I \end{array}$$

Big loop: $\varepsilon - I_1R_1 - I_2R_2 = 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{I} = \alpha R_1 + \beta R_2 = R_{eq}$.

In Problem 25.67 (c) 上图的 $\underline{\underline{R_1}} = R_2 = R_3 = R_4$ and $R_5 \to R_2$

(用 R_1 表示)

则 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

∴ $R_{eq} = \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_1 = R_1$.

(1) $\vec{B}$

o Magnet 與 magnet or 其他物質如 iron (Fe) 施加作用力—超距力, like $\vec{E}$, 用磁場(以 $\vec{B}$ 表示)描述這樣的交互作用。

$\Rightarrow$ $\vec{B}$ lines 如 Fe filings 所呈現 (Fig. 26.1)

跟 $\vec{E}$ 一樣, $\vec{B}$ 與電荷有密切關連:

charges $\rightarrow \vec{E}$

also charges $\rightarrow \vec{B}$

唯一的差別在於「運動的 charges 產生 $\vec{B}$」$\Leftrightarrow$ $\vec{B}$ 的 source 為運動的 charges.

(靜止 or 運動的 charges 都產生 $\vec{E}$)

o $\vec{B}$ force 及 $\vec{B}$ field

～$\vec{E}$ 的作法: $\vec{F}_E = q\vec{E}$, q 為測試電荷.

在沒有 $\vec{E}$, 只有 $\vec{B}$ 的 space, 觀察 q 所受之作用力 $\vec{F}_B$。

(i) q 靜止, $\vec{F}_B = 0$

(ii) $\vec{F}_B \perp \vec{v}$ (q 的 velocity) and $\vec{F}_B \perp \vec{B}$

(iii) $F_B \propto q$, $F_B \propto v$, $F_B \propto B$

(iv) Max F_B occurs at $\vec{v} \perp \vec{B}$, $F_B = 0$ when $\vec{v} \parallel \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

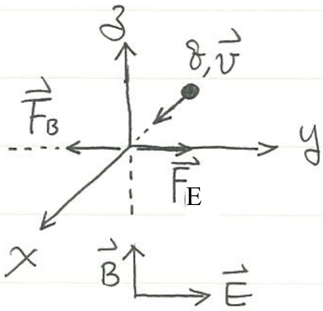
$\therefore [B] = \frac{N}{C} \cdot \frac{s}{m} \equiv$ tesla (用 T 表示), 另一常用單位 gauss (用 G 表示), $1\,T = 10^4\,G$.

地球的 B 約 1G.

羅

When $(\vec{E}+\vec{B})$ exist, q所受的電磁力 $\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$、

∵ F_B depends on $\vec{v}$, but F_E 與 $\vec{v}$ 無關, ∴ 可用 $(\vec{E}+\vec{B})$ 作為 charged particles 的速度選擇器 (velocity sector):



Let $(\vec{B}+\vec{E})$ 在 y-z plane 上, $\vec{B}\parallel\hat{k}$ and $\vec{E}\parallel\hat{j}$、

q 的 $\vec{v}\parallel+\hat{i}$, 從 −x 入射原點

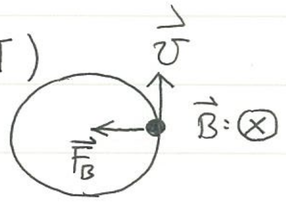
$$\left.\begin{aligned} \because\ \vec{F}_E &= q\vec{E} = qE\hat{j} \\ \vec{F}_B &= q\vec{v}\times\vec{B} = -qvB\hat{j} \end{aligned}\right\} \text{方向相反}$$

∴ When $F_E=F_B$ i.e. $v=\frac{E}{B}$, q 才能沿 +x 軸前進, 不偏離.

(2) q in $\vec{B}$

∵ $\vec{F}_B=q\vec{v}\times\vec{B}$, ∴ $\vec{F}_B\perp\vec{v}$ ⇒ F_B 不對 q 作功, i.e., 不改變 q 的 speed, but 方向.

(i) $\vec{v}\perp\vec{B}$ ⇒ 2D 等速圓周運動 (重要參數: r and T)



向心力 $F_B=qvB=m\frac{v^2}{r}$

∴ $r=\frac{mv}{qB}$: 質譜儀 (mass spectrometer) 的原理 (Example 26.2)

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi m}{qB}$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{q}{m}\cdot\frac{B}{2\pi}\ \text{(cyclotron freq.)}$$

} T, f 均與 v 及 r 無關、$\frac{q}{m}$(荷質比)相同的 particles 在 B 中 cyclotron freq. 一樣。

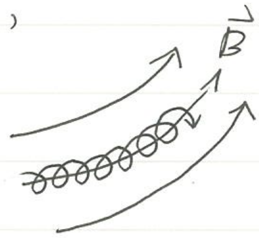
羅

(ii) when $\vec{v}$ 不垂直 $\vec{B}$ ⇒ $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ (垂直與平行 $\vec{B}$ 的分量)

$\vec{v}_\perp$：圓周運動
$\vec{v}_\parallel$：沿 $\vec{B}$ 方向運動
} 沿著 $\vec{B}$ 前進的螺旋運動 (spiral motion)

⇒ charge particles 在 $(\vec{E}+\vec{B})$ 的運動軌跡：拋物線 + 螺旋線
—複雜!

∴ charged particle 被"冷凍"在 $\vec{B}$ lines 上打轉，無法脫離. $v_\perp$↑，打轉的圈↑



→ Earth's $\vec{B}$ lines trap 從 sun 射出的帶電粒子，與大氣中的 N_2, O_2 碰撞產生極光.

→ nuclear fusion 的應用.

(3) $\vec{F}_B$ on I

◦ $\vec{J} = nq\vec{v}_d$，$\vec{v}_d$：導線中 charge carrier 的 drift velocity.

∴ 通電流 I 的導線受 $\vec{B}$ 作用.

Put 一段長 l, cross section area = A, 通 I 的直導線 in $\vec{B}$，則導線所受之力 $\vec{F} = n\cdot(A\cdot l)\cdot q\cdot \vec{v}_d\times\vec{B}$ $\quad (I = n\cdot A\cdot q\cdot v_d)$

定義 $\vec{l}$：大小為導線長度，方向為 I 方向，則

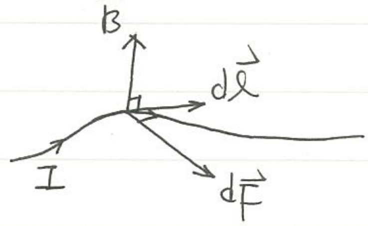
$$\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$$

(→與 wire 內 charge carrier 的正、負電性無關，∵ $q\cdot\vec{v}_d$ 不變!)

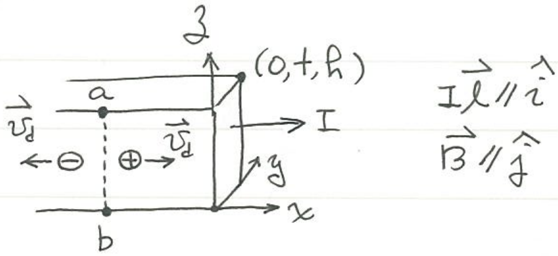
Note: random thermal motion of charge carriers results in zero force from $\vec{B}$.

雜

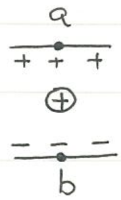
if 導線不是直 (i.e. $\vec{l}$ 的方向不 uniform) or 不均勻 $\vec{B}$,
則作用在無限小的 current element
$I \cdot d\vec{l}$ 的力 $d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$



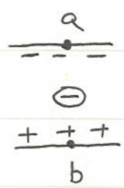
∘ The Hall effect
雖然導線所受之力 $\vec{F}_B = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$ 和 charge carrier 的正負電性無關,
但正負電性仍會造成差異 ⇒ Hall effect



如右圖,
(i) if charge carriers are ⊕
⇒ $\vec{F}_B \parallel \hat{k}$, ⊕被 $\vec{F}_B$ 推向 a 側,
建立一個電場 $\vec{E}$, 施加在
⊕ 的電力 $\vec{F}_E \parallel -\hat{k}$, 直到
$F_B = F_E$, ∴ $V_a > V_b$



(ii) if charge carriers are ⊖, 則 $\vec{F}_B$ 和 $\vec{F}_E$ 的方向與(i)相同且
最後 $F_B = F_E$, 但 $V_a < V_b$。



∴ check a, b 間的電位差, 就可得到 charge carrier 的正負電性.
$V_{ab} \equiv V_H$ = Hall potential = ?
from $F_E = F_B$, ∴ $qE = q v_d \cdot B$ or $E = v_d B$.

$$V_H = E \cdot h = v_d B h = \frac{IBh}{nqA} \quad (\because I = nqAv_d \text{ and } A = h \cdot t)$$

$$= \frac{IB}{nqt}$$

其中的 $\frac{1}{nq}$ = Hall 係數。

⇒ 由 V_H 可得 charge carrier 的 density n 及正負電性。

(4) Origin of $\vec{B}$

$\vec{E}$ 作用 charge and charge creates 電場. Source (charge $\rightarrow \vec{E}$).

How about $\vec{B}$?

$\vec{B}$ 作用 moving charge q? $\rightarrow$ Yes!

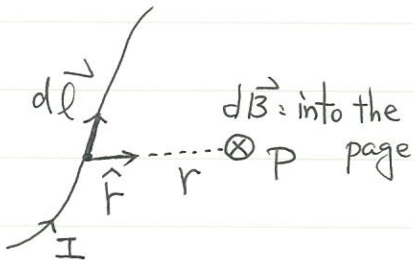
moving charge q produces $\vec{B}$? $\rightarrow$ from 对稱觀念, Yes.

最早的觀察(1820年, Oersted): 通電流導線偏轉周圍的 compass。

$\Rightarrow$ The Biot-Savart [bio-sa'zar] law:

磁場的 source 為 current element $I\cdot d\vec{l}$

在 P 點產生的磁場 $d\vec{B}$ ($\sim dq$ produces $d\vec{E}$)



$$d\vec{B} = k' \frac{I\cdot d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

where $k' = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ N/A^2$, and

$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ (permeability constant)

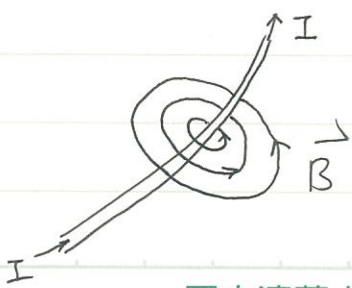
類似 $d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\hat{r}$, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

相異處: (i) $d\vec{B}$ 的 source $I\cdot d\vec{l}$ 具方向性。

(ii) dq 為獨立的 point charge, 但 $I\cdot d\vec{l}$ 卻不是, ∵ I 在一個電流迴路流動.

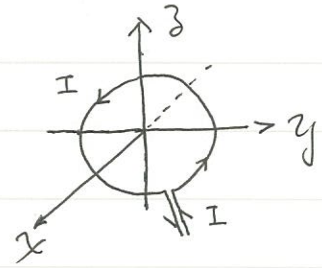
$$\therefore\ \vec{B} = \int d\vec{B} = k' I \int \frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} \quad \text{(Biot-Savart law)}$$

由 Biot-Savart law 可得通電流導線外的 $\vec{B}$ field, 如右圖.



Example 26.3 A current loop's $\vec{B}$

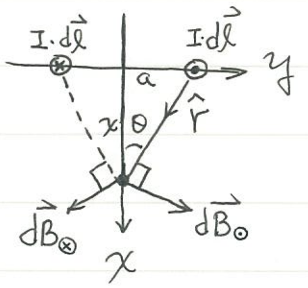
Example 26.4 in 3-rd ed.



半径为 a，電流為 I 的電流 loop
位於 y-z plane（圓心在原點），如右圖，
則 $+x$ 軸上 $p(x,0,0)$ 處的 $\vec{B}=$？

From Biot-Savart law: current element $I\cdot d\vec{l} \to d\vec{B} = k'\dfrac{I\cdot d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$

on x-y plane



⇒ y 分量抵消，只有 x 方向分量的磁場。
similarly, on x-z plane 上的 $I\cdot d\vec{l}$ 產生的 $\vec{B}$ 也只有 x 方向。

⇒ total current loop 產生的 $\vec{B}\parallel\hat{i}$

x 分量：$dB\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = dB\cdot\sin\theta = dB\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$, where

$$dB = k'\frac{I\cdot dl}{a^2+x^2}$$

$$\therefore B = \int dB\cdot\sin\theta = k'Ia\cdot(a^2+x^2)^{-3/2}\int dl = k'I\cdot\frac{2\pi a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}，方向：\hat{i}$$

Check: near field at $x=0$（電流迴路中心）

$$B(x=0) = 2\pi k'I/a = \mu_0 I/2a.$$

far field when $x \gg a$: $B(x) \cong 2k'I\cdot\pi a^2/x^3$

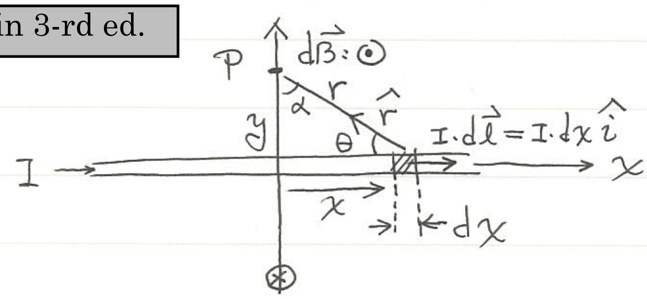
$$= \frac{2k'\mu}{x^3}, \text{ where}$$

$\mu = I\cdot A$（迴路面積）$= I\cdot\pi a^2$
= magnetic dipole moment.

羅

$\boxed{\text{Example 26.4}}$ 距I流通的無限長直導線外y處的$\vec{B}$=?

Example 26.5 in 3-rd ed.



$$dB = \frac{k' I\cdot dx\cdot \sin(\pi-\theta)}{r^2} = k'I\,\frac{\sin\theta\cdot dx}{r^2}$$

$$\therefore B = \int dB = k'I\int\frac{\sin\theta\cdot dx}{r^2}$$

$$= k'I\int\frac{\cos\alpha\cdot dx}{r^2}$$ ⇒ 積分變數: α, x, r, 課本使用 x, we try α

$$\Rightarrow \frac{y}{r} = \cos\alpha,\ \tan\alpha = \frac{x}{y},\ \therefore dx = y(1+\tan^2\alpha)\,d\alpha = y\sec^2\alpha\,d\alpha = \frac{y}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$$

$$\therefore B = k'I\int \cos\alpha\cdot y\cdot\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{y^2}$$

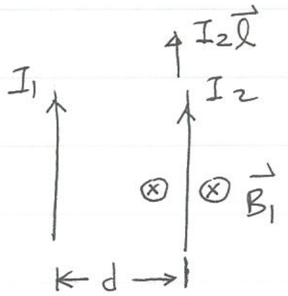
$$= \frac{k'I}{y}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\cdot d\alpha = \frac{2k'I}{y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

Note $\vec{B}$在導線兩側的方向。

⇒ 高度对稱的 B source, 使用 Ampere law 可輕易解出。

羅

○ 兩通電長直導線間的磁力



通I，長l的導線在$\vec{B}$所受之作用力
$\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$。
∴ 兩條通電的長直導線間有磁力作用。
如右圖：長l通I_2的導線所受之作用力
$\vec{F_2} = I_2\vec{l}\times\vec{B_1}$, where $\vec{B_1}$ is produced by I_1.

∵ $B_1 = 2k'I_1/d$，方向：⊗ (Example 26.4 的結果)

∴ $F_2 = 2k'I_1 \cdot I_2 \cdot l/d$，方向：← } I_1與I_2同方向時：相吸
同樣 $F_1 = 2k' I_1 \cdot I_2 \cdot l/d$，方向：→ } ⇒反向則相斥。

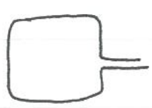
單位長度的作用力 $\frac{F}{l} = 2k'I_1 \cdot I_2/d = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}$。

(5) Magnetic dipoles (磁偶極) (比較 far field 的 $\vec{p}$ 形式)

○ In Example 26.3：一個電流 loop 在 far field 的
$B \approx 2k'(IA)/x^3$, where $A=\pi a^2$=loop's area.
($\vec{B} \parallel -\hat{i}$ if I順時針)

與 electric dipole 在軸上產生的 far field $\vec{E} \approx 2k\vec{p}/x^3$ 比較：
⇒ (i) current loop is a magnetic dipole
(ii) magnetic dipole moment $\mu \equiv IA$
(iii) $\vec{\mu}$ 的方向由(I流動的方向＋右手定則)決定：$\vec{\mu} = I\vec{A}$
(cf：$I\vec{l}$)

$\vec{A}$：$|\vec{A}|$=loop (不一定是圓)的面積



方向：逆時針的I ⇒ $\vec{A}$：⊙ (out of page)
順 〃 ⇒ $\vec{A}$：⊗ (into the page)

For N-turn current loop：$\vec{\mu} = NI\vec{A}$

羅

Note:

→ 電流loop可為任意形狀.

→ far field下,其他位置有相同形式(不一定在軸上)。

$\vec{\mu}$ 與 $\vec{p}$ 的異同: 同 在far field, 力線形狀相似且數學形式亦相似.

異 $\vec{p}$ 由靜電荷構成, $\vec{\mu}$ 由moving電荷形成;近場形式不同。

參考 Figure 26.21.   地球的 $\vec{B}$

○ dipoles vs. monopoles (磁單極)

From Figure 26.21: ⊕、⊖ point charges 可以個別獨立存在, 形成"電單極"。但 $\vec{\mu}$ 由moving charges形成, 需要一個loop才能形成 $\vec{\mu}$, ∴沒有所謂的"磁單極" (magnetic monopoles) ⇒ $\vec{B}$ lines是封閉的loops, 不像 $\vec{E}$ lines 可以是open!

∵ $\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ ($\vec{B}$ 的Gauss law, EM 4 eqs之一)

○ $\vec{\mu}$ vs. $\vec{B}$

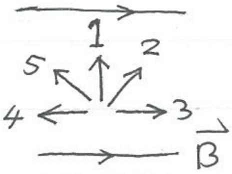
$\vec{\mu}$ 就像是小磁針, like $\vec{p}$ in $\vec{E}$.

∴ when $\vec{\mu}$ is in $\vec{B}$, $\vec{B}$ intends to lines up $\vec{\mu}$

⇒ Torque on $\vec{\mu}$ is $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$ (Fig. 26.22)

and the potential energy is $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ ($\vec{\mu}\perp\vec{B}$ 為參考點)

重要應用: Motors



$\vec{\mu}$ 的方向: 1→2→3→4→5→1→…

3→4: 由brushes與commutator的設計達成.

雜

(6) 磁性物質

magnetic matter 為 moving charges 的表現

→ 原子結構：e^- 運動形成的 $\vec{\mu}_L$ 及內在的固有的 $\vec{\mu}_s$ (spin)，

$\vec{\mu}_s$ 尤其比 $\vec{\mu}_L$ 重要。

$\vec{\mu}_L$ 與 $\vec{\mu}_s$ 的交互作用決定原子的磁性。→ 物質的磁性。

◦ Ferromagnetism (鐵磁性)

ferromagnetic materials 如 Fe, Co, Ni 與其合金被 $\vec{B}$ 強烈吸引。

原因：物質內的 magnetic domains (磁田) 的 total $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$。

magnetic domains：由 $10^{17} \sim 10^{21}$ atoms 所形成，尺寸在 $\mu m \sim mm$。
domain 內所有 atoms 的 $\vec{\mu}$ 指向同一方向 (QM 作用)，∴ 一個 domain 的 μ 只有一個方向。

但不同 domain 的 $\vec{\mu}$ 具有相異的方向，呈 random 分布。在有外磁場 $\vec{B}$ 時，每個 domain 的 $\vec{\mu}$ 傾向於沿 $\vec{B}$ 排列，∴ 為 $\vec{B}$ 所強烈吸引。

硬 (hard) 鐵磁性物質：外磁場移除後，仍保有強磁性，形成永久磁鐵。

軟 (soft) 〃 ：，不保有磁性。

Curie 溫度：熱振動破壞 domain 內原子 μ 整齊排列的溫度。

→ 鐵磁性消失，變成順磁性 (paramagnetism)

1043 K for Fe

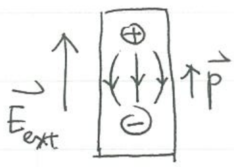
◦ Paramagnetism (順磁)：原子或分子具有永久的 $\vec{\mu}$，但彼此不會交互作用形成 domains，所以只為 $\vec{B}$ 微弱吸引。

順磁性效應只在低溫時才較明顯。 羅

◦ Diamagnetism (抗磁性): atom 沒有永久性 $\vec{\mu}$, 但有 induced $\vec{\mu}$.
∵ when 外 $\vec{B}$ changing 時 or 通過電流 loop 的 Φ_B 產生改變時, 物質為外 $\vec{B}$ 微弱排斥. e.g. C.

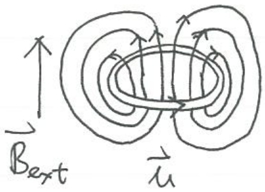
◦ Magnetic permeability and susceptibility
When 物質置於外磁場 B_{ext}, 物質本身產生的磁場 B_M 有
$B_M = \chi_m B_{ext}$ 關係。 χ_m: susceptibility (磁化度)

para: $\chi_m > 0, \sim 10^{-5}$ 為 T 的函數.
dia: $\chi_m < 0, \sim 10^{-5}$, 非 T 函數.
ferro: $\chi_m = 10^3 \sim 10^5$ 是 T 和 B_{ext} 函數



$\vec{p}$ 的形成使 dipole 內的 total 電場下降.

$$\Rightarrow \text{在物質內的 total } B = B_{ext} + B_M = (1+\chi_m) B_{ext} \equiv \kappa_m B_{ext}$$



在 current loop 內的 total B 上升。

κ_m: relative permeability (導磁率)
for ferro: $\kappa_m = 10^3 \sim 10^5$

Coils for electromagnets are wound on ferromagnetic cores to provide a much stronger B than B_{ext}.

(7) Ampere law

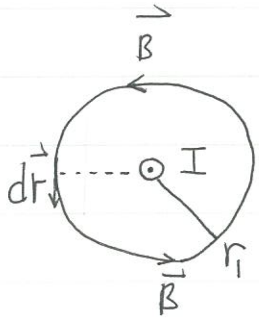
○ $\vec{E}$: Gauss law is useful for 高度对称的 charge 分布

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{enclosed}/\varepsilon_0$$

What for $\vec{B}$?

$\vec{B}$ 的 Gauss law: $\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ 故与 $\vec{B}$ 的 source – moving charges 没有関連, ∴ 並非是 $\vec{E}$'s Gauss law 角色。

Check: 长直導線產生的 $\vec{B}$ lines 为同心圓.
取半径为 r_1 的圓周为積分路徑,
路径上的 $d\vec{r} \parallel \vec{B}$ line,



$$\Rightarrow \oint_{r_1} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \oint_{r_1} B\cdot dr = \oint_{r_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\cdot dr$$

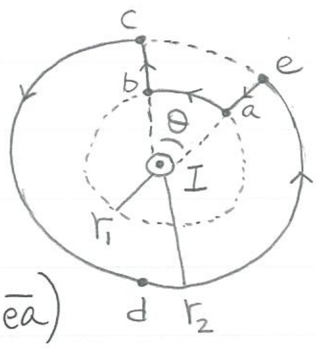
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\cdot \oint_{r_1} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\cdot 2\pi r_1 = \mu_0 I$$

— independent of r_1

→ for 任意 r 的圓路徑 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$.

→ for 任意形狀的封閉路徑 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$
且圈围電流 I

如右图的 a→b→c→d→e→a 封閉路徑



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \left(\int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cde} + \int_{ea}\right)\vec{B}\cdot d\vec{r}$$

$$= \left(\int_{ab} + \int_{cde}\right)\vec{B}\cdot d\vec{r} \quad (\because \vec{B}\perp \overline{bc} \text{ and } \vec{B}\perp \overline{ea})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\int_{ab} dr + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}\int_{cde} dr = \mu_0 I\left[\frac{r_1\cdot\theta}{2\pi r_1} + \frac{r_2(2\pi-\theta)}{2\pi r_2}\right] = \mu_0 I$$

→ 可 extend to 任意的 closed loop.

$\vec{B}$ 亦適用 superposition principle, i.e., closed loop 所圈围的電流導線皆可產生 $\vec{B}$, ∴

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enclosed} \quad \text{(Ampere law for steady current)}$$

where $I_{enclosed}$ 为封閉之積分路徑(稱为 Ampere loop ~ Gaussian surface) 所圈围之電流。

Ampere law 为 EM 4大 eq., 在 ch29 对此修正, 擴大到所有電流, 不再局限於 steady current.

$\vec{B}$ 的 Biot-Savart law ($I\,d\vec{l}$) ~ $\vec{E}$ 的 Coulomb law (dq)
$\vec{B}$ 的 Ampere law ~ $\vec{E}$ 的 Gauss law, both are global description — $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 在 source 結構下的行为.

○ Ampere law 的应用

~ Gauss law 的应用, 差别在於 Gauss 是面積分 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$, 而 Ampere 是線(or 路徑)積分 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{r}$

→ source 的对稱性
→ $\vec{B}$ lines 的方向
→ 適當的 Ampere loop 計算 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{r}$, i.e., $d\vec{r} \perp \vec{B}$ or $d\vec{r} \parallel \vec{B}$

or $\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \vec{B}\cdot\left(\oint d\vec{r}\right)$

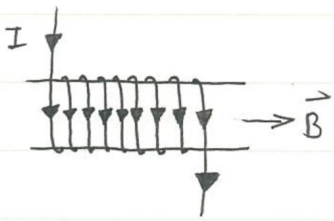
羅

⟹ Example 26.7 and 26.8

o solenoids

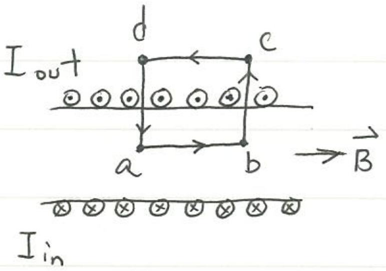
uniform $\vec{E}$ in 平行板電容器,

A uniform $\vec{B}$? ⇒ solenoid (螺旋管): 由通電流的導線緊密環繞而成, 管內的 B 均勻.



長度 >> diameter and ignore 邊緣效應 下

$B = ?$



From the results of Example 26.8:
B outside the tube is zero and is constant inside the tube.

$a \to b \to c \to d \to a$: Ampere loop

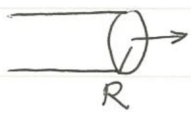
$$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \cdot \overline{ab} = \mu_0 I_{enclosed}$$
$$= \mu_0 \cdot n \cdot \overline{ab} \cdot I$$

where n is the turns of wire per unit length (線圈密度)

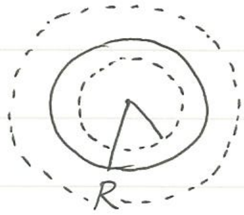
$\therefore B = \mu_0 n I$ (holds for 任意形狀的 cross section)

→ 將 solenoid 彎接成圓環 (donut-shaped): Toroid.

半径R且通有I的长直導線, I均匀分布在wire截面上,
则 $B(r\le R)$ and $B(r>R)$ = ?



$\Rightarrow$



I: ⊙
$\vec{B}$: 逆時針同心圓.

- - - - : Ampere loop (半径 = r)

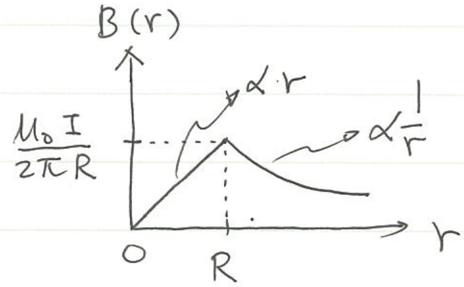
如右图, $\vec{B}$ lines 为逆時針同心圓,
∴ Ampere loop: 半径r、逆時針方向的loop, such that $d\vec{r} \parallel \vec{B}$.

From source 的对稱分布, 在半径r的圓周上, B = constant

$$\therefore \oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = B\cdot\oint dr = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_{enclosed}$$

for $r\le R$, $I_{enclosed} = \frac{r^2}{R^2} I \Rightarrow B(r\le R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$

for $r>R$, $I_{enclosed} = I \Rightarrow B(r>R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ — the same with Example 26.4.



→ Problem 26.64 where I 不均匀分布: $J(r) = \frac{J_0}{R} r$, 则
$B(r\le R)$ and $B(r>R)$ = ? (or J_0 = ?)

for $r>R$, $I_{enclosed} = \int_0^R J(r')\cdot dA = \int_0^R J(r')\cdot 2\pi r'\cdot dr' = \frac{2\pi}{3} J_0 R^2$ $\left(= I, \text{ then } J_0 = \frac{3I}{2\pi R^2}\right)$

for $r\le R$, $I_{enclosed} = \int_0^r J(r')\cdot dA = \int_0^r J(r')\cdot 2\pi r'\cdot dr'$

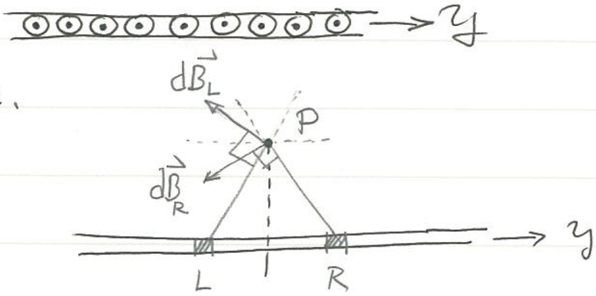
$$= \frac{2\pi}{3R} J_0\cdot r^3 \quad \left(= \frac{I}{R^3} r^3\right)$$

A current sheet

一無限大 flat sheet (假設在 x-y 平面上), 有均勻電流從 $-x$ 流向 $+x$, Current per unit width 為 J_s, 則產生的 $\vec{B} = ?$

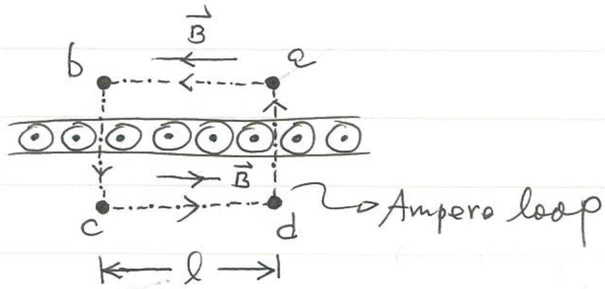
When view from $+x$ to $-x$:

Current I is out of page.



考慮場點P如右圖,由於 current sheet 的对稱性, ∴在 P點的 B=constant, 方向: ←。

同理在 sheet 下方的場點上, B=constant, 但方向: →。



$$\therefore \oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \left(\int_{a\to b} + \int_{b\to c} + \int_{c\to d} + \int_{d\to a}\right)\vec{B}\cdot d\vec{r}$$

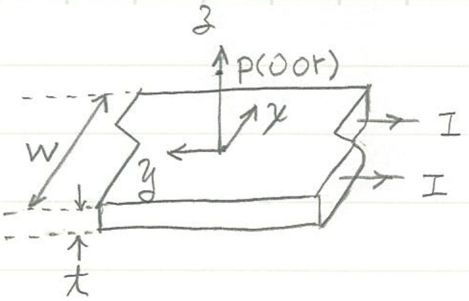
$$= \left(\int_{a\to b} + \int_{c\to d}\right) B\cdot dr \quad \left(\because \vec{B}\perp d\vec{r} \text{ at } b\to c \text{ and } d\to a,\ \vec{B}\parallel d\vec{r} \text{ at } a\to b \text{ and } c\to d\right)$$

$$= B\cdot\left(\int_{a\to b} + \int_{c\to d}\right) dr$$

$$= B\cdot 2l = \mu_0 I_{enclosed} = \mu_0\cdot J_s\cdot l$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 J_s}{2}$$

~ problem 73

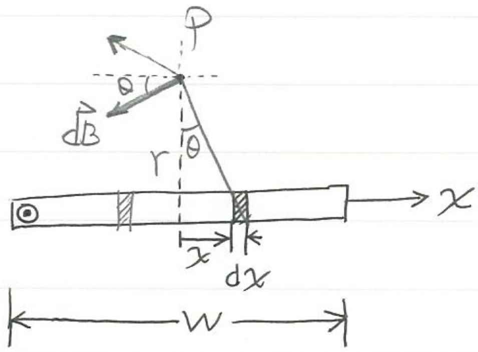


厚度t(z方向),寬度w(x方向),但無限長(y方向)的conductor sheet,有I均勻地分布在x-z平面上,由+y流向-y,如圖示。則p(0,0,r)的$\vec{B}$=?

View from $-y$ to $+y$, I is out of page.

在p點的$d\vec{B}$只有$-\hat{i}$方向

,大小為 $dB\cos\theta = dB\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$



$$dB = \frac{\mu_0\cdot dI}{2\pi\sqrt{r^2+x^2}} \quad \text{where } dI = \frac{dx}{w}\cdot I = J_s\cdot dx$$

$$\therefore B = \int dB\cdot\cos\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi w}\int_{-w/2}^{w/2}\frac{dx}{r^2+x^2} = \frac{\mu_0 I\cdot r}{\pi w}\int_0^{w/2}\frac{dx}{r^2+x^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi w}\tan^{-1}\frac{w}{2r}$$

(i) when $r \ll w$, i.e. $\frac{w}{2r} \gg 1$, $\tan^{-1}\frac{w}{2r} \approx \frac{\pi}{2}$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2w} = \frac{\mu_0}{2}J_s = \text{Result of Example 26.8}$$

(ii) when $r \gg w$, i.e. $\frac{w}{2r} \ll 1$, $\tan^{-1}\frac{w}{2r} \approx \frac{w}{2r}$

$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ~ Result of Example 26.4 — 長直導線外的 B.

雜