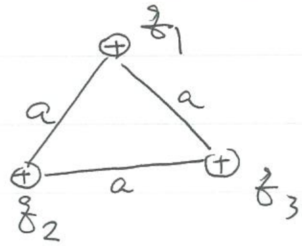
(1) Electrostatic energy



如右圖的電荷分布，明顯地須外力作功才能達成，以克服 q_1, q_2, q_3 間的排斥，形成正△。
∴此電荷分布 store 靜電能 (electrostatic energy。

用帶電導体 store 電能 is essential in technologies、$\Rightarrow C$

Q: stored 靜電能 = ?

A: 外力須作的功。

起始：先有 q_1，而 q_2 與 q_3 在 ∞.

(i) $q_2 \rightarrow q_1$:  須作功 $W_2 = q_2 V_1$, where V_1 是 q_1 建立電場時產生的 potential

$\therefore W_2 = q_2 \cdot \frac{k q_1}{a}$

(ii) $q_3 \rightarrow (q_1, q_2)$ 系統，外力須作功 $W_3 = q_3 V_{12}$, where V_{12} 是 (q_1, q_2) 系統建立電場產生的 potential

$\therefore W_3 = q_3 \left(\frac{k q_1}{a} + \frac{k q_2}{a} \right)$

$\Rightarrow$ stored 的靜電能 $U = W_2 + W_3 = \frac{k}{a}(q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1)$

W 的正、負 depends on $q_i \cdot q_j$

(water 分子有類似的 charge 分布, except $U<0$, ∵ O 帶負、H 帶正電。$U<0$ means 分解 water 分子成原子須要 energy。)

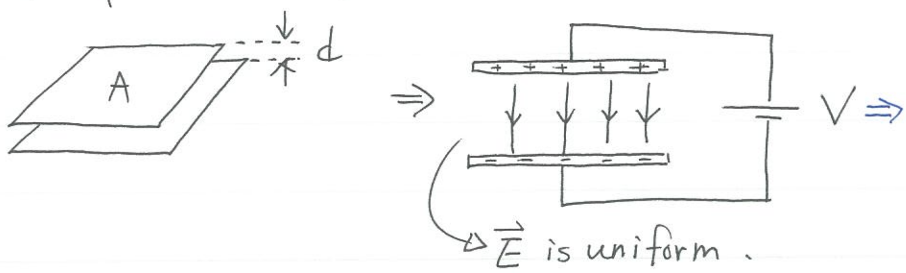
羅

(2) Capacitor (電容器，電路符号 —||—)

○ 用 capacitor stores energy 為一普遍的科技應用。

Capacitor：一對帶有異号 charges 的 conductors。

the simplest capacitor：一對相距 d、面積 A 的平行金屬板



⇒ battery 作功將 charges (正、負) 累積到板上。

設金屬板內側的 surface charge density 為 σ (接上電池即可達成)，

則 $\sigma = Q/A$，Q 為每個板所帶的電量。

⇒ $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} = \dfrac{Q}{\epsilon_0 A}$ and 板間電位差 $V = E \cdot d = \dfrac{Q \cdot d}{\epsilon_0 \cdot A}$

or $Q = \left(\dfrac{\epsilon_0 A}{d}\right) V$ showing $Q \propto V$ 且比例常數只與 capacitor 的幾何因素 (A, d) 相關。

定義電容器的電容 (capacitance) $C \equiv \dfrac{Q}{V}$ (相同 V 時能累積越多 Q 的電容器，其 C 越大。)

∴ for 平行板 capacitor $C = \dfrac{\epsilon_0 A}{d}$

$[C]$ = farad (用 F 表示)，常用 $\mu F = 10^{-6} F$ or $pF = 10^{-12} F$.

⇒ 其它形式的 capacitance, see problems 40 and 41.

羅

○ Store 在 Capacitor 中的 energy

When capacitor is connected to a battery, battery 作功將 charges 累積到 Capacitor 上，∴ Store 在 capacitor 的 energy = 電池充電 Capacitor 時所作的功 W.

$W = ?$ when charge : $0 \to Q$ on capacitor.

設已有 q 的 capacitor，其間的電位差 (=電壓) $V' = q/C$，則

再將 dq 累積到 C 須作功 $dW = dq \cdot V' = \frac{q}{C} \cdot dq$

∴ 累積 total charge Q 須作功

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\because C = \frac{Q}{V})$$

∴ Energy in a capacitor $U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C}$

(常用 $\frac{1}{2}CV^2$，∵ V 比 Q 容易測量).

○ Store 在電場 E 的 energy

$$Q = 0 \Rightarrow \begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \\ E = 0 \end{cases}, \text{ 若 } Q \neq 0 \text{ 則 } \begin{cases} U \neq 0 \\ V = \frac{Q}{C} = Ed \neq 0 \end{cases}$$

以平行板 capacitor 為例：

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

where $(A \cdot d)$ = volume of capacitor.

∴ 定義 energy density of E 為 $u_E = \frac{U}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

such that u_E 與 C 無關。⇒ 只要有 E 就有 energy.

$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ 在其他形式的 E 也正確.

∴ For 任意的 E，其 stored energy $U = \int u_E \cdot dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 \cdot dV$.

where dV 表微積分體積.

⇒ Example 23.5

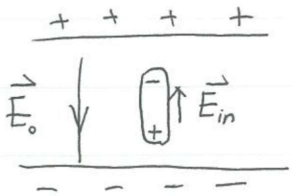
羅

(3) Capacitor的使用：介電質及串並聯。

o the simplest capacitor：平行板，中間是air。(air為良好絕緣体)。
But C值仍是很小，∵ $C=\frac{\epsilon_0 A}{d}$，$\epsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}$很小。

∴ For application, capacitor的兩個導体間放入dielectric —— 具dipole的物質，以增加C值。

Why dielectrics 會增加C？



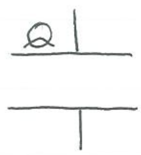
Dielectric內產生與外電場$\vec{E}_0$相反方向的電場$\vec{E}_{in}$

∴在dielectric內的net電場

$E_{net} = E_0 - E_{in} < E_0$

Let $\frac{E_0}{E_{net}} = \kappa \ (\geq 1)$, κ: dielectric constant.

Case 1：沒有接上battery的C



$\Rightarrow C = \frac{Q}{V}$

板上的charge Q = fixed、

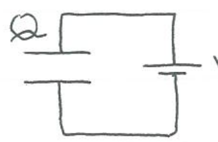
設此時板間的電壓及電場各為V, E。

放入介電質後，其板間的電場 $E' = \frac{E}{\kappa}$，∴ $V' = \frac{V}{\kappa}$

$C' = \frac{Q}{V'}$

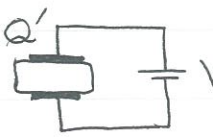
$\Rightarrow C' = \frac{Q}{V'} = \kappa\frac{Q}{V} = \kappa C$.

Case 2：接上battery的C ⇒



$\Rightarrow C = \frac{Q}{V}$

在置入介電質後，板上的charges必須增加以維持其間的電壓V，i.e., $Q' = \kappa Q$



$\Rightarrow C' = \frac{Q'}{V}$

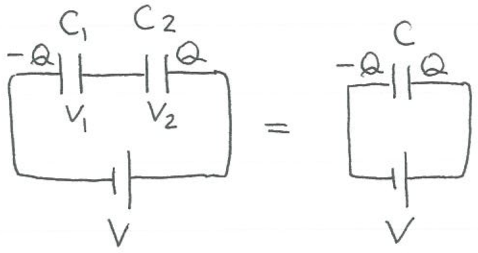
(即$\sigma' = \kappa\sigma$)，∴ $C' = \frac{Q'}{V} = \frac{\kappa Q}{V} = \kappa C$.

Table 23.1 各種物質的κ及breakdown fields。

雜

○ C 的串-並联

串联(connection in series)

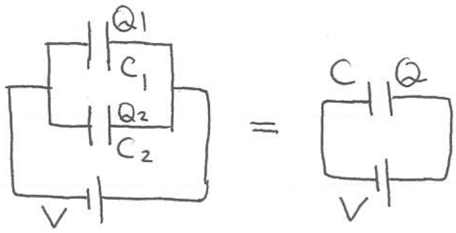


$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \qquad V = Q/C \qquad \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

For N capacitors in series : $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$ and $C < C_i$ 。

並联(Connection in parallel)



$Q_1 = C_1 V$

$Q_2 = C_2 V$

$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow CV = C_1 V + C_2 V$

$\therefore C = C_1 + C_2$

For N capacitors in parallel : $C = \sum_i C_i$ and $C > C_i$

羅

Example $\boxed{23.5}$ 電荷Q均勻分布在半徑R_1的球面上，則將其壓縮到較小半徑R_2的球須作功多少？

外力作正功 or 負功 ⇒ 正功，∵ 表面積↓，charge間的排斥力↑，∴要作正功。

$W = U_2 - U_1$

$U = (Q, R)$ 的 potential energy = ?

<u>方法(i)</u>（課本用法）

$U = \int u_E \, dV = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int E^2 \, dV$ （球內部的 $E = 0$）

$= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^\infty E^2 \, dV = \frac{1}{2}\epsilon_0 \cdot k^2 Q^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^4} \cdot \underbrace{4\pi r^2 \, dr}_{= dV = \text{半徑}r\text{的shell面積} \times \text{shell厚度}dr}$

$= \frac{kQ^2}{2R}$

方法(ii)：

將 dq 放到 (q, R) 的球面，外力須作功 $dW = dq \cdot V(q, R)$

∴ $dW = \frac{k}{R} q \cdot dq$。

放滿Q，外力須作功 $W = \int dW = \frac{k}{R}\int_0^Q q \cdot dq = \frac{kQ^2}{2R}$

∴ $W = U_2 - U_1 = \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) > 0$

羅