# Wolfson ch21 Gauss law



(1) 電力線($\vec{E}$ lines) 和電通量 (electric flux, 用 $\Phi_E$ 表示)

- 具体化 $\vec{E}$：用 $\vec{E}$ lines 表現

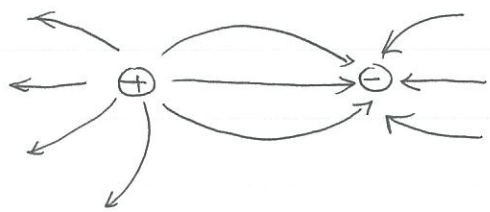
  $\vec{E}$ 的特點：大小 and 方向

  ∴ $\vec{E}$ lines 需表現 $|\vec{E}|$ 及 $\vec{E}$ 的方向：方向以箭頭表示，

  $|\vec{E}|$ 的強弱則以 $\vec{E}$ line 的密度表現。

$\vec{E}$ lines 的性质：

(i) +電荷発出，終止於 ∞ 或負電荷



(ii) 電荷上発出或終止的 $\vec{E}$ line 数目 ∝ 電荷大小。

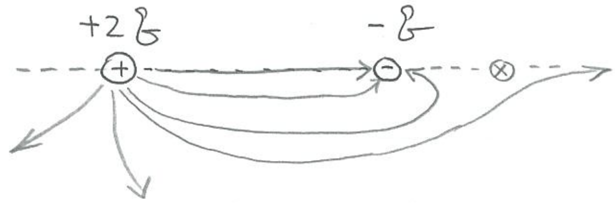
(iii) $\vec{E}$ line 上 P 點的切線方向 = P 點上 $\vec{E}$ 的方向

(iv) $|\vec{E}|$ ∝ $\vec{E}$ line 密度.

(v) ∵ superposition principle ∴ $\vec{E}$ lines 不交叉 (∵ 交叉點會表示有两個切線方向)

例子：$2q$ 和 $-q$ 系統的 $\vec{E}$ lines：对稱、近場、遠場，$E=0$ 的點

(Benson Example 23.3)




(i) 連心線的上、下部 $\vec{E}$ line 对稱

(ii) 近場：$\vec{E}$ lines 径向輻射且球狀对稱.

(iii) 遠場：$\vec{E}$ lines 呈 $2q-q=q$ 的形狀

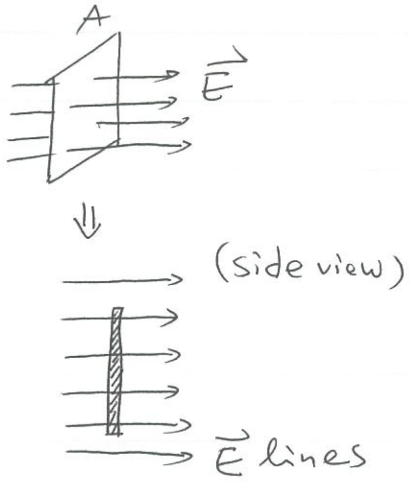
(iv) 在連線上有一處 ⊗ $|\vec{E}|=0$ 的地方、

(v) $\vec{E}$ lines 数目：$2q$ 是 $-q$ 的两倍、

○ 電通量 $\Phi_E$

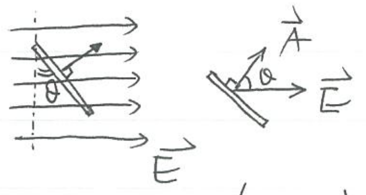
(i)

將一面積為A的平面垂直$\vec{E}$，放入均勻$\vec{E}$中，則稱通過A的 $\Phi_E = E \cdot A$，如右圖.




但如A和$\vec{E}$非呈垂直，則通過A面積的電力線數目減少，如下圖所示，則

$$\Phi_E = EA\cos\theta。$$



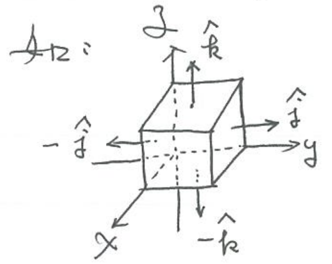

如將平面A的法線向量$\vec{A}$表示平面的方向，則

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cdot \cos\theta.$$

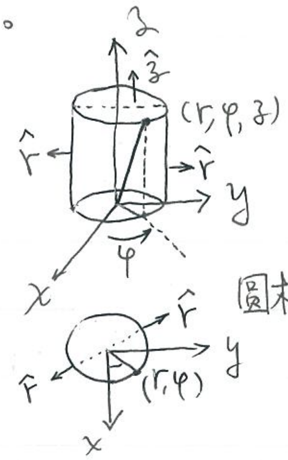
(But：一個平面的法線向量有兩個方向，which one?)

(ii) 在電磁學中，重要的是封閉曲面的討論，定義封閉曲面的方向：向外。

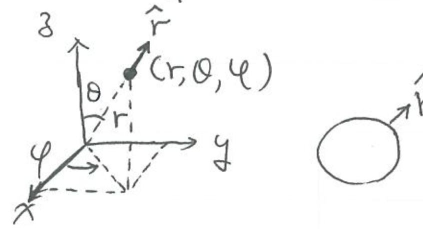
如：




直角座標系




圓柱座標系



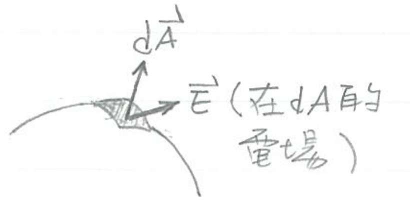

球座標系

(iii) For不規則的封閉曲面，則分割成很多的微細面積$d\vec{A}$

and $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ , where $\oint$ 表示封閉曲面的積分、

(In fact，只有高度對稱的封閉曲面才能算出$\Phi_E$).

(2) Gauss law



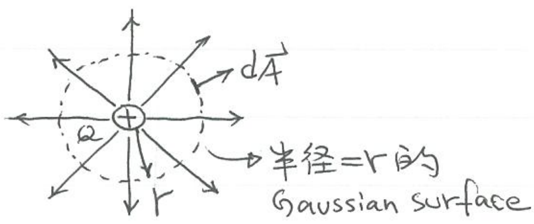

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{enclosed}/\varepsilon_0$$

or simply, $Q_{enclosed} = \varepsilon_0 \Phi_E$, where

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85\times10^{-12}\ C^2/N.m^2$ : permittivity constant.

⇒ 穿過一個封閉曲面(~Gaussian surface)的$\Phi_E$,乘以$\varepsilon_0$
= 曲面所包圍的淨電荷 $Q_{enclosed}$。

(i) Gauss law ⇒ Coulomb law




choose radius = r 的 Gaussian surface.
→ +Q的E径向輻射向外, ∴ $\vec{E} \parallel d\vec{A}$
→ Gaussian surface上每一點距Q有
相同距離, ∴在Gaussian surface上的$|\vec{E}|$為定值.

$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E\cdot dA = E\oint dA = E\cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$

$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}$ = Q所建立的電場

置q於E中,則作用在q上的力 $F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2} = \frac{kqQ}{r^2}$

~ Coulomb law.

- Gauss law的運用: 对稱性
用Gauss law求E的key point為Gaussian surface的选擇:
(a) 由charge的对稱分布决定$\vec{E}$ lines的形狀和方向.
(b) Gaussian surface的选擇: $d\vec{A} \perp \vec{E}$ lines or $d\vec{A} \parallel \vec{E}$ lines.

Examples: 21.1 ~ 21.6 (含观念例題21.1)

⇒ Fig. 21.19

2D $\sigma \Rightarrow E \propto r^0$ dipole: $E\propto r^{-3}$
1D $\lambda \Rightarrow E\propto r^{-1}$ quadrupole: $E\propto r^{-4}$.
0D point $\Rightarrow E\propto r^{-2}$

羅

(3) Gauss law and conductors

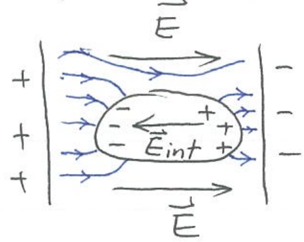
↱ 只有熱隨机 motion.

○ 靜電平衡 (electrostatic equilibrium)：導体內自由電荷的淨位移為零、(or free charges stop to move)，此時自由電荷所受淨力 = 0.

In conductors : free charges are readily to move in $\vec{E}$.

∴ put conductor in $\vec{E}$, when $\vec{E}_{int} = \vec{E}$, free charges stop to move,

∴ 在 conductor 內的 net $\vec{E} = 0$




∴ 靜電平衡 ⟺ conductor 內的 $\vec{E} = 0$.

(if conductor 內的 $\vec{E} \neq 0$, 則其驅駛 free charges 移動 ≠ 靜電平衡).

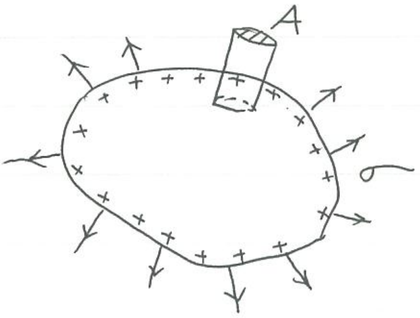
Of course, 靜電平衡是巨观現象.

∵ Conductor 外的 $\vec{E}$ lines 垂直 conductor 表面, 如有平行表面的分量, 將驅駛 free charges 移動.

○ When conductor 帶電且達靜電平衡時, 則這些電荷分布在表面上。

∵ 達靜電平衡, ∴ conductor 內的 net $\vec{E} = 0$, 依 Gauss law, 取 Gaussian surface 從內部無限靠近表面, 其 $Q_{enclosed} = 0$, ∴ conductor 所帶 excess 電荷必須分布在表面.




○ 導体表面的E，如右圖的 Gaussian surface 上端面有E lines 通过，下端面處於導体内，∴ $\vec{E}=0$

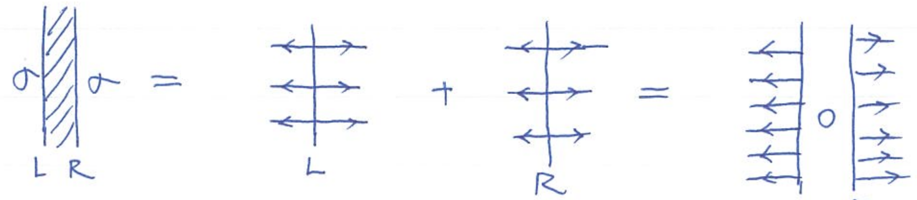
∴ $E\cdot A = A\cdot\sigma/\epsilon_0 \Rightarrow E=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

($E\propto\sigma$，∴電子設計應避免產生高σ)

Although $E\propto\sigma$ = local charge density, E does not arise from the local density because the charges arrange themselves in such a way that $\vec{E}$ at any point depends only on σ right at that point — even though $\vec{E}$ arises from all charges on the surface. (see 下例)

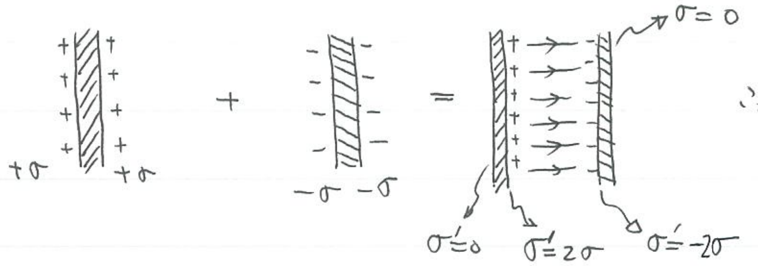
Q: 一独立的 thin 導体板，只有一面具有σ，則其表面的 $E=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$，但 Example 21.6 的結果顯示其表面的 $E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ⇒ 何處矛盾？
└→ 無限大 2D-plane

Ans:
不會有 charges 只分布在一面的 thin 導体板，charges 必須平均分布在 conductor 表面！∴一面為σ，另一面也必須是σ，∴




$E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\times 2=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

另例：put two isolated、charged 導体板(各有σ and −σ)靠近形成平行板，則板中的E=?




∴ $E=\frac{2\sigma}{\epsilon_0}$

(Note：此例為課本的最後一例，at p366，3同！)

$\boxed{21.1}$ ✓

A uniformly charged sphere $(Q, R)$, find $\vec{E}(r) = ?$

⇒ Check the symmetry of charge distribution：球狀對稱

∴ choose Gaussian surface = spherical surface of radius $r$

(i) $r > R$

∵ $\vec{E} \parallel d\vec{A}$, ∴ $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA$

從高斯面上每一個點看 charge 分布都相同，∴ 在高斯面上的 E 都相同，∴ $\oint E \cdot dA = E \oint dA = E \cdot 4\pi r^2$

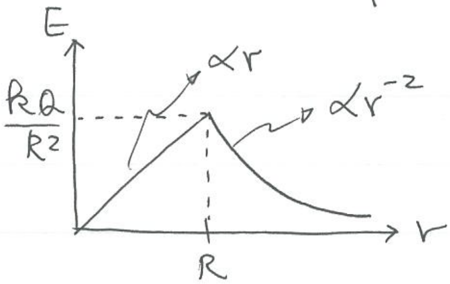
Next, $Q_{enclosed} = Q$ when $r > R$.

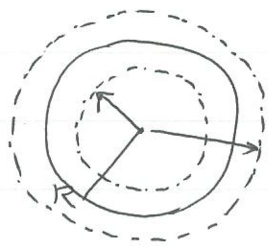
∴ $E(r>R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$，方向：$\hat{r}$ (why?)

(ii) $r < R$

The same as (i), except $Q_{enclosed} = \dfrac{r^3}{R^3} Q$ when $r < R$

∴ $E(r<R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \dfrac{r^3}{R^3} Q = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r$，方向：$\hat{r}$ (why?)




$\boxed{21.2}$ A uniformly charged hollow spherical shell $(Q, R)$, find $E(r) = ?$

Similar to $\boxed{21.1}$, $E(r>R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, but

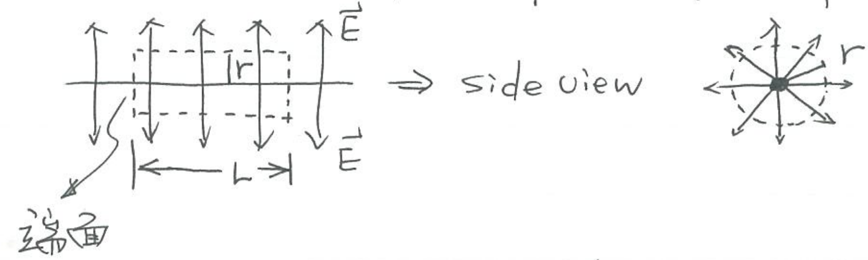
$E(r<R) = 0$ because $Q_{enclosed} = 0$

⇒ 球殼內各處的 $E = 0$.

**21.4**

無限長的 charged line of charge density $=\lambda$ C/m 的 $E(r)=?$
$r=$ 離 line 的距離.

Check: $\vec{E}$ 的方向: 以 line 為中心輻射向外 (why?)



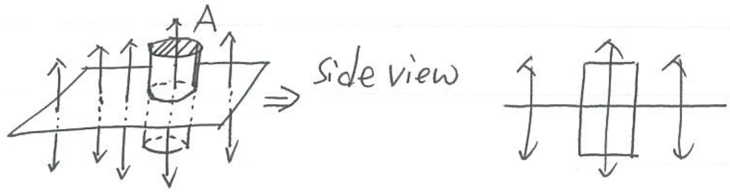

Choose 長 L, 半徑 r 的圓柱體面為 Gaussian surface, ∴
端面的 $d\vec{A}\perp\vec{E}$, 圓柱面的 $d\vec{A}\parallel\vec{E}$

$$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{柱面}} E\cdot dA = Q_{enclosed}/\varepsilon_0 = \lambda\cdot L/\varepsilon_0$$

∵ 半徑 r 的柱面上每點所看到的電荷分布皆相同, ∴ 柱面上的每點皆有一樣的 E 值, ∴ $\int_{\text{柱面}} E\cdot dA = E\cdot\int_{\text{柱面}} dA = E\cdot(2\pi r\cdot L)$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r},\ \text{方向}: \hat{r}\ (\text{輻射向外})$$

**21.6** 無限大的 sheet 帶有均勻的 surface charge density $\sigma$ C/m², 則 sheet 外的 $E=?$




Check $\vec{E}$ 的方向: sheet 的兩側向外, ∴ choose
圓柱體面或長方體面為 Gaussian surface, 設端面之面積為 A。
∵ 端面 $d\vec{A}\parallel\vec{E}$, 側面的 $d\vec{A}\perp\vec{E}$

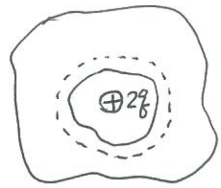
$$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{端面}} E\cdot dA = \underbrace{E\cdot\int_{\text{端面}} dA}_{E\text{ 在端面為固定值 (why?)}} = E\cdot 2A = Q_{enclosed}/\varepsilon_0 = \frac{A\cdot\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, 方向: 外向.

⇒ 無限大的意義. (prob. 20.71)
⇒ 觀念例題 21.1 (p363)

羅

$\boxed{21.7}$ 不規則中空導体帶 $+q$，空腔內只有 $+2q$ 的 point charge．在靜電平衡下，內腔壁及外表面的淨電荷為何？（i.e. 導体上的電荷分布為何？）




內腔壁的 charge：如右圖的 Gaussian surface（∞靠近內腔壁），∵在 conductor 中，∴ $E=0 \Rightarrow Q_{enclosed}=0$

∴內腔壁的 charge 為 $-2q$．

Conductor 的 total charge $= q$，∴有 $+3q$ 的 charge 分布在外表面．