

電磁力是除重力外那吾人最密切的作用力，舉凡力學、化學與生物的作
用力皆為電磁力。

(1) 電荷

Electric charge 是電子與質子的一個 intrinsic property.
藉由觀察帶電物体的交互作用瞭解電荷的知識：

- (i) 電荷分為 positive 及 negative 兩種。
- (ii) 同種電荷相斥，不同類則相吸。
- (iii) 物体的淨電荷 (net charge) 為兩種 charges 的代數和
(algebraic sum)

每個 e 帶有相同多的 charge，每個 proton 亦有相同多但量性與 e
相反的 charge，此 charge 為基本電荷量 e ， e 的量為 $-e$ ，proton 的為 $+e$ 。

物体所帶的 charge 為 quantized，即為 e 的整數倍。

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C (Coulomb 庫倫)}$$

有非整數 e 的基本粒子 quark (如 $\frac{1}{3}e$) 無法單獨存在。

⇒ 電荷守恆: the net charge in a closed system remains constant.

(2) Coulomb's law

帶電體間交互作用之規則：

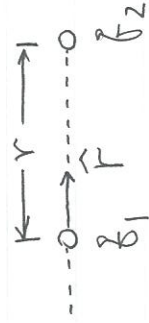
- (i) 若 q_1 與 q_2 的作用力方向沿著兩者連線的連線 (連心力)
- (ii) 作用力大小正比於 $q_1 \times q_2$
- (iii) 作用力大小與兩者距離平方成反比。

$$\Rightarrow \text{Coulomb's law: } \vec{F}_{12} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}$$

= q_1 施加在 q_2 的作用力

where $k = 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$. \hat{r} 由 q_1 指向 q_2 的單位向量。





∴ When q_1, q_2 同号则
($q_1 \times q_2 > 0$)
 \vec{r} 为斥力

When q_1, q_2 異号则
($q_1 \times q_2 < 0$)
 \vec{r} 为吸力

○ Coulomb's law 是適用於 point charges, 即無尺寸或尺寸大小, 但 r 相比可忽略, i.e., q_1, q_2 的電荷分布體尺寸 \ll 空間的距離 r .

For 數個 point charges $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ 對 point charge q_a 的

$$\text{Coulomb's force } \vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ia} = \vec{F}_{1a} + \vec{F}_{2a} + \vec{F}_{3a} + \dots + \vec{F}_{Na}$$

此即為 superposition principle.

point charges 間的 Coulomb 作用力 $\propto r^{-2}$, 但電荷分布體的 Coulomb 力則不一定是如此. See Example 20.2.

(3) 電場 (electric field, 用 \vec{E} 表示)

$$\sim \vec{g} = \text{force per unit mass in CH } g = \vec{F}_g / m$$

Similarly, 定義 \vec{E} = force per unit charge $\vec{E} = \vec{F} / q_{\text{test}}$

$$\vec{E} = k \frac{q \cdot \vec{r}_{\text{test}}}{r_{\text{test}}^2} \cdot \hat{r} = \frac{k q}{r^2} \hat{r} = \text{charge } q \text{ 在周圍空間所建立的電場}$$

$$\therefore [E] = N/C.$$

\vec{E} 的方向由 q_{test} 的電性有關 (though q_{test} doesn't appear in $\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$)

⇒ 限定 q_{test} 為正電荷 (positive test charge)

∴ 正 point charge 建立的 \vec{E} 方向: 輻射向外, 負者為輻射向內。

⇒ \vec{E} : take positive point charge q_{test} 置於空間某點, 量測其所受之 Coulomb 力, 除以 q_{test} 即為中點的 \vec{E} .



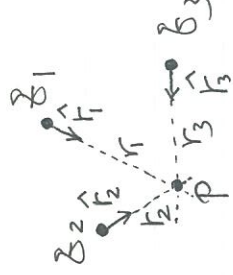
(4) 电荷分布的 \vec{E}

o superposition principle 通用於 \vec{E} .

For 空间中有点 charges q_1, q_2, q_3, \dots , 则在某一点中的 \vec{E}

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots = \sum \vec{E}_i$$

$$= \sum k \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

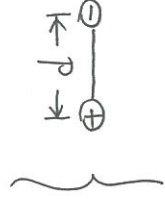


如右图, 在 field point 中某点的

$$\vec{E} = k \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2} \hat{r}_3 \right)$$

o Electric dipole (电偶极, 用 \vec{p} 表示)

为一重要的电荷分布, 尤其是在分子尺寸时. 其由同数量的正、负点电荷所构成.



\vec{p} 的方向 = 由 $\ominus \rightarrow \oplus$



Electric dipole 的 $\vec{E} = ?$ (Example 20.5)

$$\vec{E} = \frac{k}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}] \quad (\text{Benson problem 25.14}), \quad \hat{r} \text{ 的参考点是 dipole 中心.}$$

where $p = qd = \text{electric dipole moment.}$

(i) 在分子轴上的 $\vec{E} = \vec{p} \parallel \hat{r} \therefore 3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p} = 2\vec{p}$

$$\therefore \vec{E} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}$$

(ii) \perp 分子轴的 $\vec{E} = \vec{p} \perp \hat{r}, \therefore 3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p} = -\vec{p}$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{k}{r^3} \vec{p}$$



0 电荷分布在 \vec{E}

~ 计算连续体的作法, 将连续体切割成张小的细塊 (dx, dA, dV), 再将其中的电荷 dq 产生的电场 dE 加起来, i.e.,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{k \cdot dq \cdot \hat{r}}{r^2}$$



$dq = \lambda dx, dA, dV$ 間的連繫: **charge density**

1 D = linear charge density λ (C/m), $dq = \lambda \cdot dx$

2 D = surface charge density σ (C/m²), $dq = \sigma \cdot dA$

3 D = volume charge density ρ (C/m³), $dq = \rho \cdot dV$

Examples
20.6 and 20.7.

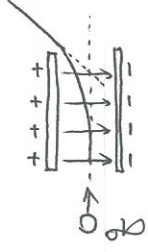
(5) 物質与 \vec{E} 的交互作用

0 point charge

e^- 的 mass \ll proton $\ll 10^3$ order, \therefore 被 \vec{E} 作用時, 加速度遠比 proton 大。

When 电子经过均匀 \vec{E} 時, 其路径为抛物線,

利用此特性製造静电場能量解析器 (electrostatic analyzer) i.e., 带电粒子的速率选择器。 \Rightarrow Example 20.8 (page 6)



0 dipole \vec{p} in uniform field \vec{E}

如右圖, dipole 在均匀 \vec{E} 中的淨外力 = 0,

但 net torque $\neq 0$ 。以 dipole 中心为参考點

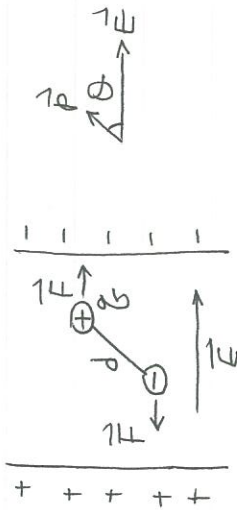
產生的 torque $\tau_+ = r_+ \cdot F_+ = \frac{d}{2} \cdot F \sin\theta$

$\therefore \tau = \tau_+ + \tau_- = d \sin\theta \cdot F = d \sin\theta \cdot q \vec{E}$

= $p E \sin\theta$, 方向: into the page.

$$\Rightarrow \tau = \vec{p} \times \vec{E}$$

\therefore 當 $\vec{p} \parallel \vec{E}$ 時 $\tau = 0$, 作用在 \vec{p} 的淨力矩皆為零, \vec{p} 为最穩定狀態, i.e. 位能處於最低。



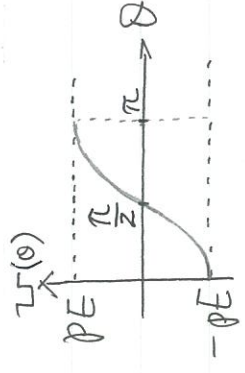
要改變 dipole 的位置時，外力必須作功，所作的功又位能 U store 在系統中。設外旋轉 dipole 從 $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ (dipole 的 θ 不變) 須作功 W ，則

$$W = \int \tau \cdot d\theta = pE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta = -pE \cos\theta_2 - (-pE \cos\theta_1)$$

$$= U(\theta_2) - U(\theta_1) \Rightarrow U(\theta) = -pE \cos\theta + \text{constant}$$

choose constant = 0

$$\therefore U(\theta) = -pE \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



Note: $U(\theta=0) = -pE =$ 最大值.

When \vec{E} is not uniform, 則作用在 dipole 上的淨力也淨力矩皆不為零。一個重要的例子是不均勻的 \vec{E} 由另一因 dipole 所產生，如右圖。

$\therefore |\vec{E}| > |\vec{E}'|$, \therefore dipole B 為 dipole A 所吸引， \therefore 為氣球分子

間 (如 NO , CO , CO_2) van der Waals 力的由來。

○ 導體、絕緣體 (insulators) 及介電質 (dielectrics)

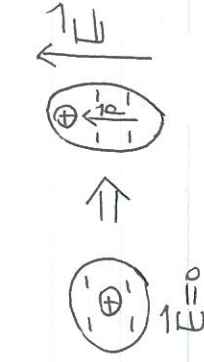
Conductors (如金屬、離子溶液、離子化合物) :

導體 (如 e^- , p^+) 可自由移動， \therefore 在電場作用下，形成電流。

Insulators: 雖有帶電體，卻無法自由移動， \therefore 無法形成電流。

{ 極性分子 (polar molecules) 為具有永久的內在 dipole moment 的分子，如水， HCl 。非極性分子可因外加 \vec{E} 而產生 induced dipole moment、

由這兩類分子所構成的物質稱為介電質 (dielectrics)。

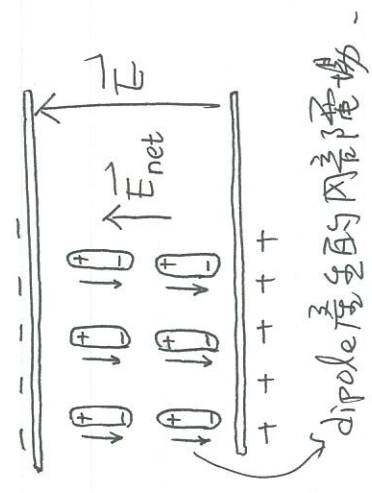


\vec{E} 作用

\therefore 由外加電場所產生的 induced dipole moment \vec{p} 。



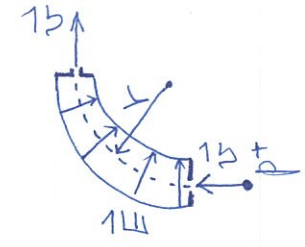
介電質在外電場 E 中時，體內的淨電場比 E 小，如右圖所示。
 原因：排列整齊的 dipole 產生的內部電場抵消一部分的 E 。
 (在討論電容時，有定量描述)



dipole 產生的內部電場。

若 E 過大，則 dipole 的電荷被游離，形成類似 conductor 的狀態，此稱為 dielectric breakdown，對電子設備產生傷害。大自然中的 dielectric breakdown = lightning，對象為 air 分子。

Example 20.8



如右圖的同心圓弧金屬板建立的電場 $E = E_0 \cdot (\frac{b}{r})$ ，
 r 是圓弧金屬板中心的半徑，proton 由下方入口垂直入射，
 若 p^+ 要在右邊出口中心逸出，則 $v = ?$ (E_0, b 為常數)

此為 p^+ 的 UCM， E 施加在 p^+ 的 Coulomb 力提供向心力，
 在 r 處的 p^+ 所受的力

$$ma = \frac{mv^2}{r} = e \cdot E = e \cdot E_0 \cdot \frac{b}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{ebE_0}{m}}$$

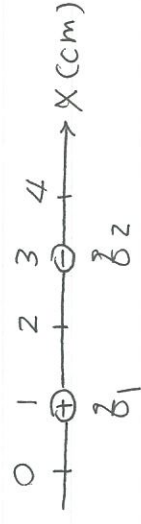
speed $> v$ 的 p^+ 撞裏外板 } 皆無法在右出口逸出。
 speed $< v$ // 內 //

\therefore 是 speed 選擇器——一種能量解析器。



Example 20.1: Coulomb's law

在數線上的兩個 point charges



$q_1 = 1.0 \mu\text{C}$, $q_2 = -1.5 \mu\text{C}$, 則 $\vec{F}_{12} = ?$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{where } \hat{r} = \hat{i} \\ &= -k \frac{1.5 \times 10^{-12} \hat{i}}{(2 \text{ cm})^2} = -34 \hat{i} \text{ N} \end{aligned}$$

觀念例題 20.1

e^- 和 q^+ 之間的電力作用與重力作用的比較。

電力作用 $F_E = k \frac{e^2}{r^2}$, 重力作用 $F_G = G \frac{m_e m_p}{r^2}$

$$\therefore \frac{F_E}{F_G} = \frac{k e^2}{G m_e m_p} = 2.3 \times 10^{39}$$

(i) 計算基本拉開的 e^- 作用時, 可忽略重力作用。

(ii) 電力作用遠比重力大很多, why 日常生活中沒有重力作用是明顯?



Example 20.2

如右圖，則位於 $(0, y)$ 的 Q 所受的力 $= ?$

\vec{F}_+ : Q 受到位於 $+a$ 的 q 所施加之電力

\vec{F}_- : " " $-a$ "

$\therefore Q$ 所受淨力 $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = |\vec{F}_+| \cdot 2 \cos \theta \hat{i}$ (x 分量抵消)

$$= \frac{kqQ}{y^2 + a^2} \cdot 2 \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \hat{i}$$

$$= \frac{kQ \cdot (2q)y}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}$$

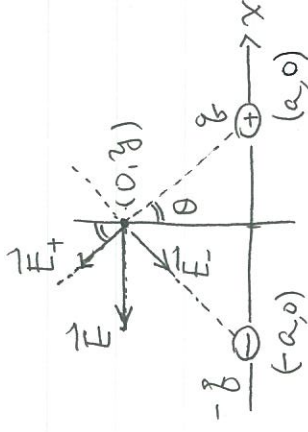
check: (i) near field at $y=0$, $\vec{F}=0 \Rightarrow$ Yes,

(ii) far field for $y \gg a \Rightarrow \vec{F} \approx k \frac{(2q) \cdot Q}{y^2} \hat{i}$

相當於 $(q+a) = 2q$ 是 point charge

Example 20.5 一個極性分子的 \vec{E}

類似 Example 20.2, 如右圖的 dipole 分布, 則在 $(0, y)$ 的 $\vec{E} = ?$



由圖可知 $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

$$= |\vec{E}_+| \cdot 2 \sin \theta \cdot (-\hat{i})$$

$$= \frac{kq}{y^2 + a^2} \cdot \frac{2a}{(y^2 + a^2)^{3/2}} (-\hat{i}) = -k \frac{(q \cdot 2a)}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}$$

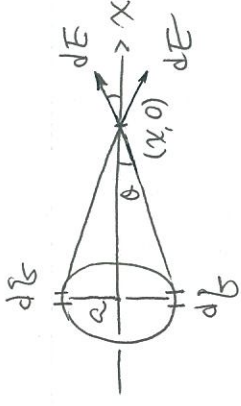
$$= -\frac{k\vec{p}}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

Far field: $y \gg a$, $\vec{E} \approx -\frac{k\vec{p}}{y^3}$



Example 20.6 A charged ring

半径 a , Q 均匀分布其上的 ring, 中心轴上的 $\vec{E}=?$



由右图可知 \vec{E} 只有 x 分量, y 分量因抵消而为 0.

$$\therefore dE = k \cdot \frac{dq}{r^2} = k \cdot \frac{dq}{x^2 + a^2}$$

$$\therefore \vec{E} = \hat{i} \int dE \cdot \cos\theta = \hat{i} \int k \cdot \frac{dq \cdot x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{kx \hat{i}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dq = \frac{kQx \hat{i}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (\text{Compared with Example 20.2})$$

$$(\int dq = \lambda \cdot dl = \frac{Q}{2\pi a} \cdot a \cdot d\phi \quad \vec{F}_a \rightarrow d\phi)$$

$$= \frac{Q}{2\pi} d\phi, \text{ and } \int d\phi = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = Q$$

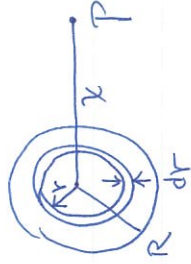
check: (i) near field at $x=0, \vec{E}=0$

(ii) far field at $x \gg a \Rightarrow \vec{E} \approx \frac{kQ}{x^2} \hat{i}$,

the ring becomes a point charge.

此题 Example 重要, 技巧可以 extend 到 charged disk (problem 71~73) 到 charged shell & sphere, 不过后者因高度对称, 所以用 Gauss law.

Problem 71. charged disk of surface charge density σ (C/m^2), 则中心对称轴上的 $\vec{E}=?$



半径 r 的 ring 中的 charge $dq =$ ring 的面积 $\cdot \sigma$

$$= 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$$

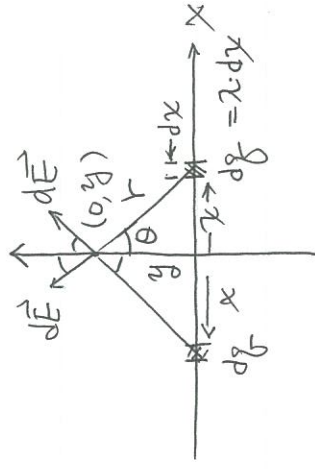
$$dq \text{ 产生的 } dE = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dq = 2\pi k \sigma x \cdot \frac{r \cdot dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\therefore E = \int_{r=0}^{r=R} dE = 2\pi k \sigma x \int_0^R \frac{r \cdot dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$



x 軸上無限長的均勻帶電線，charge density = λ (C/m)，則 y 軸上 (0, y) 的 $E = ?$

由右圖可知 E 只有 y 分量，x 分量因抵消而為 0。



$$\therefore E = \int dE \cdot \cos\theta$$

$$= \int \frac{k \cdot dq \cdot y}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = k\lambda \int \frac{y \cdot dx}{r^3}$$

where $r^2 = x^2 + y^2$.

When dq 在 x-軸移動時， θ , x , r 皆隨之改變，此三個變數都可成為積分變數。它們的關係為 $\sin\theta = \frac{y}{r}$ and $x = y \tan\theta$.

(i) x 為積分變數

$$E = k\lambda y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 2k\lambda y \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2k\lambda}{y} \quad \left(\text{變數代換: } x = y \tan\phi, \text{ 則 } \frac{dx}{dy} = y \sec^2\phi. \right.$$

$$\left. 1 + \tan^2 A = \sec^2 A. \text{ When } x: 0 \rightarrow \infty, \phi: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \right)$$

(ii) θ 為積分變數

$$E = \int \frac{k \cdot dq}{r^2} \cdot \cos\theta = k\lambda \int \frac{dx}{r^2} \cdot \cos\theta \quad \left(\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{x^2} \text{ and } \frac{dx}{d\theta} = y \sec^2\theta \right)$$

$$= k\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \cdot d\theta = 2k\lambda \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot d\theta = 2k\lambda \frac{y}{y}$$

(iii) Try r 為積分變數

Note: (i) 此題用 ch21 的 Gauss's law 解時，比較簡單。
 (ii) E 的通反性 = 以線電軸為中心輻射面外，強度 $\propto r^{-1}$ ， r 為距離電軸的距離。

(iii) 無限長在實際情況下的意義 = 距有限長帶電線非常近的地方。

