光波的疊加：干涉和繞射

(1) 干涉 (interference)

○ Coherence

觀察光波干涉的先決條件：coherent sources (同調光源)，
具有相同波長和固定相位關係 ($\Delta\phi$ = constant) 的光源。

理想光源：laser, coherent and monochromatic (波長
分布非常窄，可視為單一波長) light.

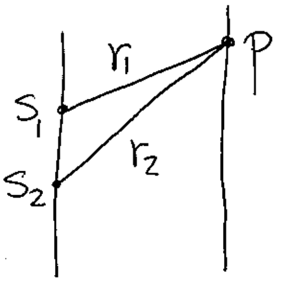
Coherence length: laser $\sim$ 30 km
lightbulb $\sim$ 1 m.

○ 干涉的定量描述

Constructive (相長) 干涉：波峯－波峯 or 波谷－波谷重疊.

Destructive (相消) 干涉：波峯－波谷重疊.

相同 λ 的 S_1 和 S_2



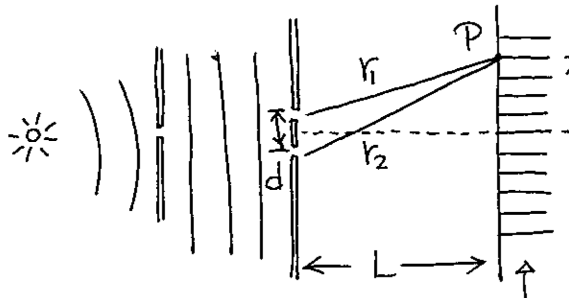
S_1, S_2 至 P 的路程差 (path difference)

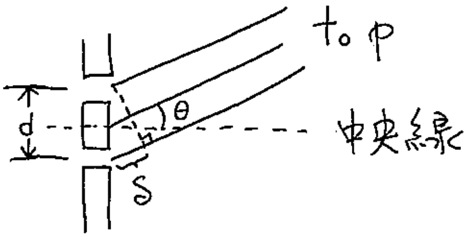
$\delta = r_2 - r_1$

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\text{Constructive}: \delta = m\lambda \\ \text{Destructive}: \delta = (m+\frac{1}{2})\lambda\end{array}\right\} m \in \mathbb{Z}.$$

先決條件：$|\delta| <$ coherence length.

(2) 双縫干涉 — Young double slit interference





slit ~ 點光源
(修正 in diffraction)

- 干涉 fringes 的位置:

  $\because L >> d$, $\therefore \delta = r_2 - r_1 \cong d\sin\theta$ $(r_2 \sim /\!/ r_1)$

  $\therefore$ Constructive (亮紋): $\delta = d\sin\theta = m\lambda$
  Destructive (暗紋): $\delta = d\sin\theta = (m+\frac{1}{2})\lambda$ $\Big\}$ $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

  m: order of the fringe (中央線上、下对稱分布)
  m = 0: 中央亮紋 (只有一條, 在中央線上)

  Typical values: $L \sim 1\,m$, $d \sim 1\,mm$, $\lambda \sim \mu m$

  $\therefore$ fringe 的間距很小, even for large m,

  $\therefore \sin\theta \simeq \tan\theta = y/L$

  i.e. $\delta = dy/L$ or $y = \frac{L}{d}\delta$

  $\therefore$ 亮紋位置 $y_{bright} = m\lambda \cdot \frac{L}{d}$

  暗紋位置 $y_{dark} = (m+\frac{1}{2})\lambda \cdot \frac{L}{d}$

- 干涉 pattern 的 intensity

  干涉除可用 δ 表達外, 亦可用 phase constant 間的差表達.

  $\because$ 兩個相位差為 2π 的 wave 的疊加為 constructive, 相位差為 π 者則為 destructive.

  $\therefore$ 相位差 $= 2\pi \sim \delta = \lambda$,

  $\Rightarrow$ 相位差 ϕ 和 δ 的關係為 $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta$

雜

∴ 在 p 點的 $S_1 = E_1 = E_p \sin\omega t$
$S_2 = E_2 = E_p \sin(\omega t + \phi)$ } ϕ 為 S_1、S_2 在 p 的相位差.

∴ p 點的 $E = E_1 + E_2 = \cdots = 2E_p \cos\frac{\phi}{2} \cdot \sin(\omega t + \frac{\phi}{2})$
$= E_0 \sin(\omega t + \frac{\phi}{2})$, where $E_0 \equiv 2E_p \cos\frac{\phi}{2}$

∵ intensity $I \propto \text{amplitude}^2$, let $I_1 = I_2 = I_0 \propto E_p^2$
then intensity of E 為 $I \propto E_0^2 = 4E_p^2 \cos^2\frac{\phi}{2}$

∴ $I = \text{constant} \cdot I_0 \cdot \cos^2\frac{\phi}{2} = \text{constant} \cdot I_0 \cdot \cos^2(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \delta)$
$= \text{constant} \cdot I_0 \cdot \cos^2(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{dy}{L})$

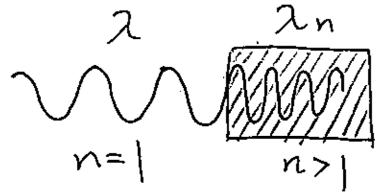
I_{max} (亮紋) when $\delta = m\lambda$
I_{min} (暗紋) when $\delta = (m + \frac{1}{2})\lambda$ } $m \in \mathbb{Z}$.

(3) 干涉現象

○ thin film 干涉

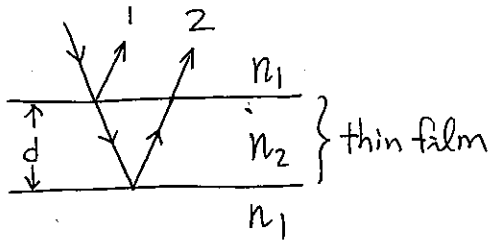
介質的折射率 (refractive index) $n \equiv \frac{c}{v} = \frac{\lambda}{\lambda_n}$, where
c (v) = 光在真空 or air (介質 n) 中的 speed,
λ (λ_n) = 〃 的波長。

Key point : 光的 frequency 在穿越界面時 unchange, ∴
$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{v}{\lambda_n}$

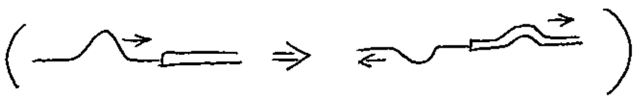


thin film 干涉除考慮路程差外, 還需考慮
反射時, 相位是否反轉.

羅



Ray 1 和 Ray 2 的干涉，不論 $n_1 > n_2$ 或 $n_1 < n_2$，相位皆為 π (or $\lambda/2$)



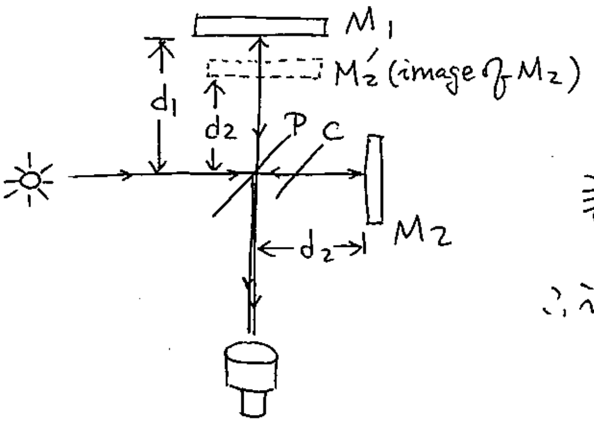
在只需考慮~⊥入射且不考慮折射(∵d很小)時

$\delta = 2d = (m+\frac{1}{2})\lambda_n$ 為 constructive 干涉

即 $2nd = (m+\frac{1}{2})\lambda$ 時為相長干涉.

(n_1, n_2, n_3 時則較複雜需考慮大小次序)

○ Michelson 干涉儀 (interferometer)



$\delta = 2(d_1 - d_2)$

調整 d_1，使干涉圖樣產生變化

∴設明紋在 $d_1 \to d_1 + \frac{\lambda}{4}$ 則變成暗紋，在 $d_1 + \frac{\lambda}{2}$ 又變回明紋.

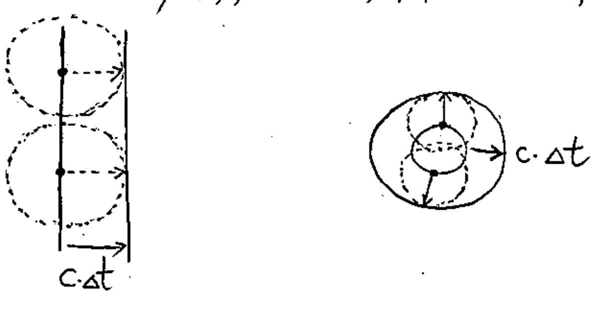
⇒ 設 λ 知道，則 d_1 的測量準確度可達 $\frac{\lambda}{4}$!

(4) Huygens 原理和 diffraction (繞射)

波前 (wavefront)：相位相同的點，如波峯或波谷，所成的連線.

○ Huygens 原理：

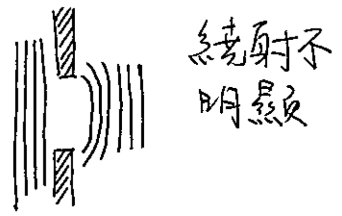
每個波前上的任一點可視為一點波源，發出球面波 (wavelet)，Δt 後，新的波前 = 此類球面波的切面.

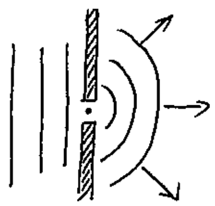


向右和向外傳播的平面波(左)和球面波(右)

○ 繞射 (diffraction) 現象

When slit 寬度 $a \gg \lambda$; $a \lesssim \lambda$: 繞射顯著.



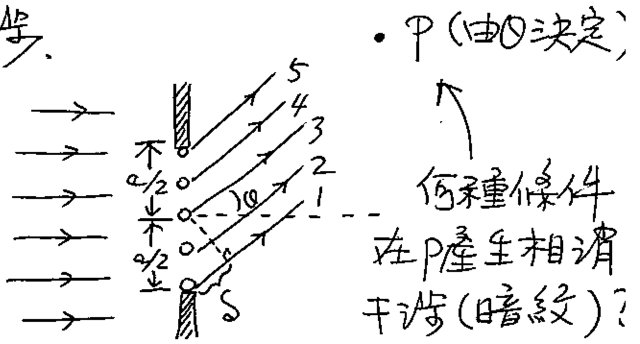


○ 單縫繞射

在双縫或多縫干涉皆假設每個縫為單一點波源, i.e. $a \lesssim \lambda$ 的情形。實際情形是 $a > \lambda$, ∴根據 Huygens 原理, 須將 slit 視為由很多點光源所構成.

∴ 單縫繞射 ～ 無限多縫的干涉.

將 a 等分成 2 区域, 5 個 Huygens 點光源, 則 Ray 1–3, Ray 2–4, Ray 3–5 間的 $\delta = \frac{a}{2}\sin\theta$,



∴ P 點形成相消干涉條件:

$\delta = \frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$ or $a\sin\theta = \lambda$ 、 (Note: $a \lesssim \lambda$)

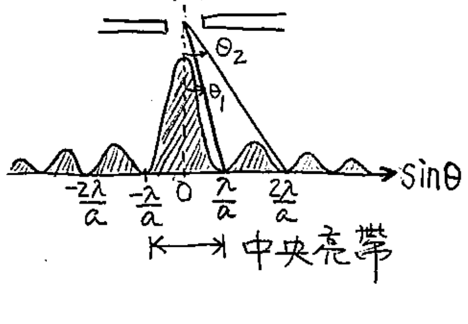
i.e. 上下区域在 P 產生暗紋的條件為 $a\sin\theta = \lambda$.

→ 將 a 等分成 $2N$ 区域 $(N = 1, 2, 3, \cdots)$, 則相鄰区域產生相消干涉的條件: $\delta = \frac{a}{2N}\sin\theta = (n+\frac{1}{2})\lambda$ ($n \in$ 自然數)

or $a\sin\theta = N(2n+1)\lambda$

$= m\lambda$ (m = 不為零整數, 以中央線上下对稱分布)

$m = 0$ 為中央亮紋 — 所有 Rays 相長干涉.



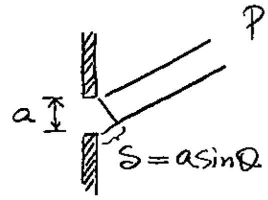
1-st minimum : $\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$

(i) when $a \gg \lambda$, $\sin\theta \sim \theta = \frac{\lambda}{a}$

θ 很小, 分不出暗紋 → 繞射不顯著

(ii) when $a \sim \lambda$, 中央亮帶↑ → 繞射顯著。

o 單縫繞射的intensity



P點的diffraction pattern 決定於slit不同位置發出的光線間的相位差。

最重要的兩個位置：slit的兩端點；$\delta = a\sin\theta = m\lambda$ for暗紋、

and $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta$

在P點的wave 振幅 $E \propto \frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}}$ (用phsor或problem 68的積分式)

∴ P點的intensity $I = I_0\left(\frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\phi/2}\right)^2$

I_0是中央亮紋的intensity (check $\lim_{\phi\to 0}\frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\phi/2} = 1$)

暗紋的條件：$\sin\frac{\phi}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta = m\pi$

or $a\sin\theta = m\lambda$ (與前相同)

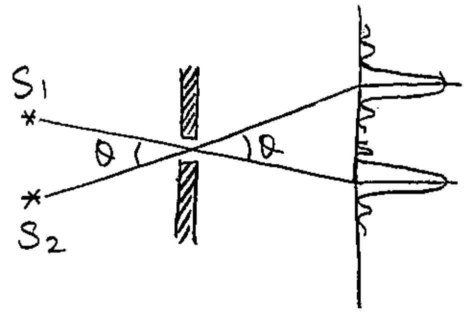
(5) 繞射限制解析力 (繞射極限)

$\text{點光源} \longrightarrow \underbrace{\text{slit or aperture}}_{\text{光學系統}} \longrightarrow \text{繞射pattern (not a point)}$

∴ 解析2個點光源的位置為繞射pattern所限制.

For slit, 1-st min 的角度為 θ_{min}, 則 $\sin\theta_{min} = \frac{\lambda}{a}$

For 直徑D的圓形孔徑 (aperture) $\sin\theta_{min} = 1.22\frac{\lambda}{D}$



羅

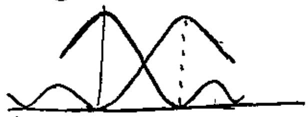
When $S_1 \to S_2$，繞射 pattern 開始 overlap.

判斷 S_1, S_2 是否可被解析：Rayleigh's criterion

When S_1 (or S_2) 的中央最大值 (central max.) 和另一光源的 1-st min. overlap 時，為恰可解析 (barely resolved).

S_1 和 S_2 的間距小於恰可解析時的距離時 ⇒ 無法解析.

Rayleigh's criterion



此時的 θ 通常很小，∴ $\sin\theta \sim \theta$.

恰可解析時的角度為 θ_{min}

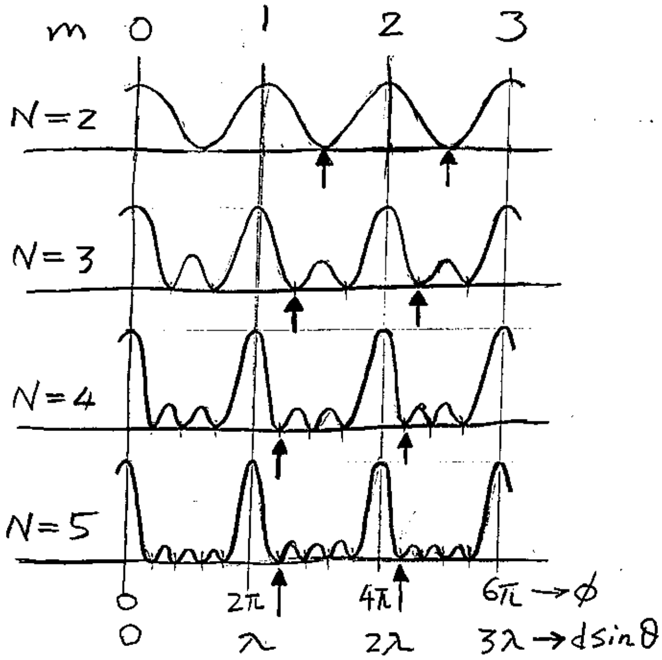
$$\Rightarrow \quad \theta_{min} = \begin{cases} \lambda/a & \text{for slit} \\ 1.22\lambda/D & \text{for aperture of 直徑 } D. \end{cases}$$

在 $\theta < \theta_{min}$ ⇒ 無法解析.

∴ 光學系統的 $\theta_{min}\downarrow$，解析度 $\uparrow$。∴ 光學望遠鏡的 D 愈大，解析度愈高。

(6) 多縫的干涉和繞射

$\uparrow$: 1-st min. of m : $d\sin\theta = (m+\frac{1}{N})\lambda$



- N slits

  each slit ~ 點光源，

  $N=2$，相長干涉：$d\sin\theta = m\lambda$

  $N=3$，3rd slit 和其他 2 個 slits 相長干涉：$d\sin\theta = m\lambda$

for N slits，相長干涉條件相同：$d\sin\theta = m\lambda$.

特徵：As $N\uparrow$，亮紋 → 窄，亮度 $\uparrow$ ($\propto N^2$)

暗紋位置：$d\sin\theta = \frac{m}{N}\lambda$

m 非 N 的整數倍數.

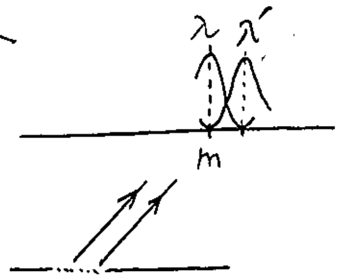
羅

- Grating (光柵)

As $N >> 1$, 如 $\sim 10^3/cm$, i.e. $d \sim 10^{-5} m \rightarrow$ diffraction grating：有限多、相距 d 的點光源形成 diffraction pattern（單 slit：無限多點光源）.

Important property：resolve light of nearly equal wavelengths

Rayleigh's criterion to resolve λ and λ'



↑↑↑ λ and λ' with $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$

λ 的 m-th order max：

$$d \sin\theta = m\lambda$$

其 1-st min 的位置為

$$d \sin\theta = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda 。$$

For 此位置為 λ' 的 m-th max (Rayleigh's criterion)：$d\sin\theta = m\lambda'$

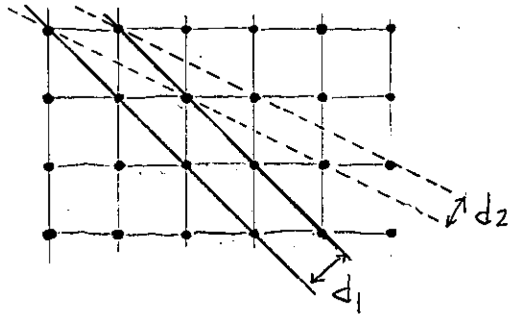
$$\therefore \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda = m\lambda'$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \equiv \text{resolving power of grating } R.$$

$R \uparrow$，愈能解析 $\Delta\lambda$ 愈小的入射光。

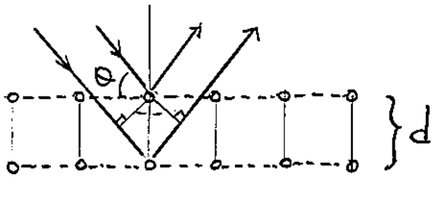
- X-ray 繞射

Atoms in crystal can be consider to lie in various planes, each of which acts like a mirror.



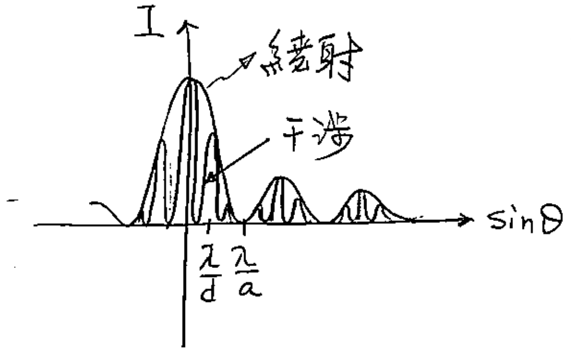
When $\delta = 2d\sin\theta = m\lambda$ (Bragg 條件)

$\Rightarrow$ constructive 干涉，$m \in N$



○ 干涉+繞射

When slit的寬度不可忽略時，双slits干涉需加入繞射效应：



干涉max.：$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}$

繞射min.：$\sin\theta = \frac{m'\lambda}{a}$

羅