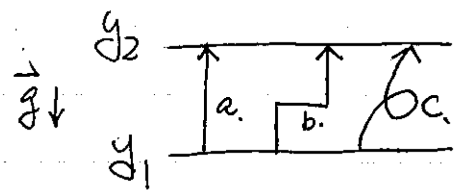
1. 保守力 (Conservative forces) vs. 非保守力

保守力 (用 $\vec{F}_c$ 表示) 作功可以將energy可逆地轉換成其他
energy形式，如動能和位能 (potential energy，下述)
保守力作的功和路徑無關，只和路徑的起始和終點位置有關。
$\Longleftrightarrow \oint \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0$ ($\oint$表示積分路徑是一個closed path)

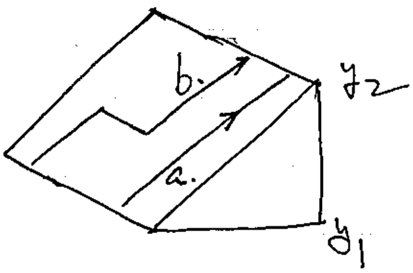
在一個closed path，起始點＝終點。

非保守力 (用 $\vec{F}_{nc}$ 表示) 則無上述 $\vec{F}_c$ 的特性。

$\vec{F}_c$ 如重力 $\vec{F}_g$，spring力 $\vec{F}_{sp}$；$\vec{F}_{nc}$ 如 $\vec{f}$ (friction).



For path a, b, and c, $\vec{F}_g$ 作的功都相同.
and $y_1 \to y_2 \to y_1$ (closed path) 則作功為零



For friction $\vec{f}$，沿 a and b
兩條路徑所作的功的功不相等，且
在 $y_1 \to y_2 \to y_1$ 時，所作的功不為零、

羅

2. Potential energy (位能,用 U 表示)

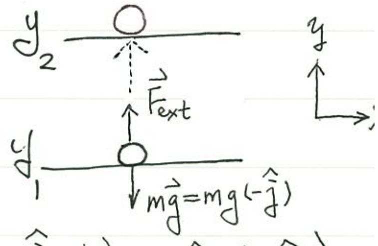
U: 交互作用系統中,系統中物体(如重力場的物体 or spring 系統中的 m)因位置改變所具有的能量。

U 與 F_c 作功 W_c 間的關係 (輔助說明:外力 F_{ext} 與其作的功 W_{ext})

例:地表重力場(交互作用系統)

設 $\vec{F}_{ext}$ 等速移動 m: $y_1 \to y_2$

(i.e. $\vec{F}_{ext} = -m\vec{g}$ and $\Delta K = 0$), 則



$$W_{ext} = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} mg \cdot dy$$

$(\vec{F}_{ext} = mg\hat{j},\ d\vec{r} = dr\hat{j} = dy\hat{j})$

$= mg(y_2 - y_1) =$ m 因位置變化 $y_1 \to y_2$ 而多有的能量.

設 y_1 的 U 為 U_1, y_2 處為 U_2, 則 $W_{ext} = U_2 - U_1 = \Delta U = mg(y_2 - y_1)$

$\Rightarrow U_2 = mgy_2 +$ 常數, $U_1 = mgy_1 +$ 常數,

i.e. $U_g(y) = mgy$ (gravitational U), y 為 m 的高度。

(令 U_g 的參考點: y=0 時為零, ∴常數=0)

and $\Delta U_g = mg(y_2 - y_1) = mg \cdot \Delta y$.

$\vec{F}_{ext}$? → Consider 系統的 $\vec{F}_c = -m\vec{g}$

$$W_c = \int \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} (-mg) \cdot dy = -mg(y_2 - y_1) = -\Delta U$$

or $\boxed{\Delta U_{AB} = U(B) - U(A) = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r}}$, $\vec{F}_c$ 為系統的保守力.

In 1D: $\Delta U = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = U(x_2) - U(x_1)$

Think about spring system (1D) ⇒ $F_c = -kx$ and $F_{ext} = kx$

∴ $\boxed{U_{sp}(x) = \frac{1}{2}kx^2 \text{ (elastic } U)}$

$U_{sp}(x)$ 的理想參考點 $x = 0$。 羅

$W_c = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\Delta U_{AB}$ 的負號意義：
保守力作功趨使系統的位能減小，
使系統往更穩定的方向前進，如地面上的物体，
處於 spring 自然長度的 m 等。

- 重要的是 ΔU，而非 U 本身。吾人有自由度選擇 U 的參考點或零點。

3、Mechanical energy 守恆

In ch 6, we have work-energy theorem $\Delta K = W_{net}$.

If 系統中有 F_c and F_{nc}，則可將 W_{net} 的成分有 W_c 及 W_{nc}

i.e. $W_{net} = W_c + W_{nc} = \Delta K$

但 $W_c = -\Delta U$，∴ $\boxed{\Delta K + \Delta U = W_{nc} = \Delta E}$

where $E \equiv K + U$ = mechanical energy.

if 系統中沒有 F_{nc}，則 $W_{nc} = 0$ and $\Delta E = E_f - E_i = 0$

i.e. $K_i + U_i = K_f + U_f$ i: initial state
f: final state

$\rightarrow E = \text{constant}$ (机械能守恆)

羅

4. U and U curves

○ 微積分：if $g(x)=\int f(x)\,dx+g_0 \Leftrightarrow \frac{dg(x)}{dx}=f(x)$

In 1D： $\Delta U = U(x)-U_0 = -\int F_c(x)\cdot dx$

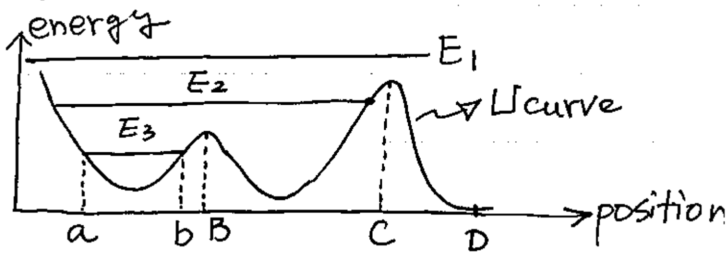
$\therefore \boxed{F_c(x) = -\frac{d}{dx}U(x)}$ (3D form?)

i.e. $U(x)$的slope負值為x處的作用力 $F_c(x)$.

∴ from U可以得知(i)交互作用力 and (ii)平衡狀態, i.e. $F=0$。

○ U curves：conceptual example 7.1

roller coaster 的U圖及車子可能具有的机械能 E_1, E_2, E_3 (忽略f).



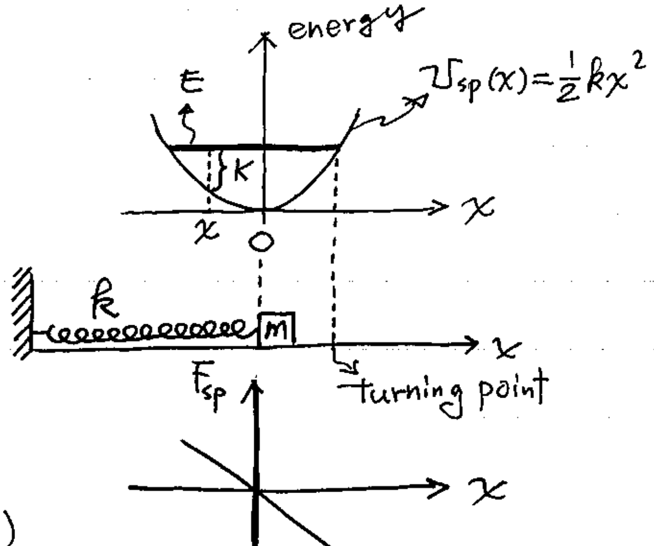
E_1：car 可到達 everywhere.

E_2：lower E, car 無法越過 peak C,
被局限(trapped)在較小的区域

E_3：更低的E, car is trapped 在更小的区域 $[a, b]$.

⇒ car is trapped in a potential well. a, b are the turning points.

○ U curves in spring system



$E = K+U$ and

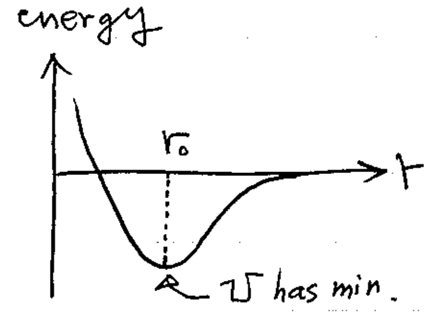
$F_{sp}(x) = -kx$ = m 所受之 spring force, 在 $x>0$ 区域, 將m拉回

⇒ $x>0$ 区域是吸引力 ($F<0$)

同理 $x<0$ 区域是排斥力。($F>0$)

① U curves in H-H system

原子間的作用力 ~ spring force。
將一個 H fixed 在原點，則另一個 H 的
U curve 如右圖，r = separation.
r_0 即為平衡位置 = bond length。
在 system 的 E<0 時，2 H atoms 形成
bound system（不能分離），即 H_2 分子。



羅

Wolfson Example 7.3

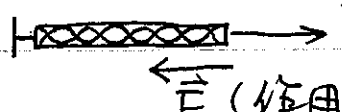
登山繩具有彈性以緩衝下降。若此rope的拉力F與伸長量x的關係為 $F=-kx+bx^2$，
$k=223\ N/m$，$b=4.10\ N/m^2$，則從 $x=0$ 被拉長到
$x_0=2.62\ m$，store在rope的potential energy (=0 at $x=0$) = ?

問題解析：

此問題與spring的彈性位能有關。但此rope
並不遵守Hooke's law：$F_s(x)=-kx$，∴不是理想
spring。但求位能的方式一樣，∵F是$F(x)$形式。

步驟：外力作功 = store在rope的位能

(也可以用保守力作功
與ΔU的關係：
$-\Delta U=\int F(x)\,dx$)



計算：1D問題

∵ $F_{ext}=-F=kx-bx^2$

F_{ext}作功的距離 $x=0\rightarrow x_0$，∴其作功

$$W_{ext}=\int_0^{x_0}F_{ext}(x)\,dx=\int_0^{x_0}(kx-bx^2)\,dx$$

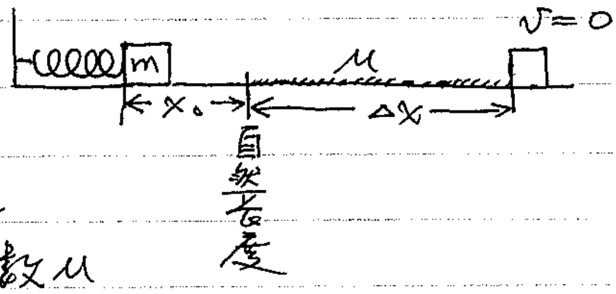
$$=\frac{1}{2}kx_0^2-\frac{b}{3}x_0^3=741\ J$$ = store在rope的位能。

答案評估：登山繩只有伸長功能，沒有壓縮功能，∴
$x>0$。
Store的位能比理想spring $F_s(x)=-kx$ 少 ~3%。
原因：$F=-kx+bx^2=-(k-bx)x$
可以視為 $k'(x)$，but $k'(x)<k$ ∵ $x>0$。
∴ $+bx^2$項減小rope的彈力 → 減少store的位能。

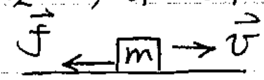
$F(x)$是保守力嗎 → Yes！

Wolfson Example 7.6

質量m的block放在壓縮x_0的水平理想spring前。靜止釋放，m在脫離spring接觸後經摩擦係數μ的水平面上Δx距離後停止，$\Delta x=?$

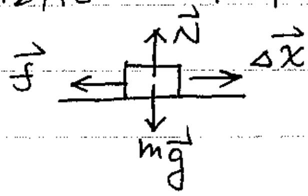


Interpret：有spring的位能、m的動能、及非保守力－friction f，f對m作負功，最後耗盡m的K（從spring U所轉換而來）



Develop：Initial：$U_{spring}=\frac{1}{2}kx_0^2$

Final：$E_f=0=U_f+K_f$，重力位能 = constant.



f所作的功 $W_{nc}=\vec{f}\cdot\Delta\vec{x}$

$$=-f\cdot\Delta x$$

$$=-\mu N\cdot\Delta x=-\mu mg\cdot\Delta x$$

Evaluate：$\Delta E=E_f-E_i=W_{nc}$

$\therefore\ 0-\frac{1}{2}kx_0^2=-\mu mg\cdot\Delta x$，$\therefore\ \Delta x=\dfrac{kx_0^2}{2\mu mg}$。

Assess：
$\left.\begin{array}{l}\text{if } k\uparrow,\rightarrow\Delta x\uparrow\\ \text{if } \mu\uparrow,\rightarrow\Delta x\downarrow\\ \text{if } \mu\rightarrow 0,\ \Delta x\rightarrow\infty\end{array}\right\}$ makes sense.

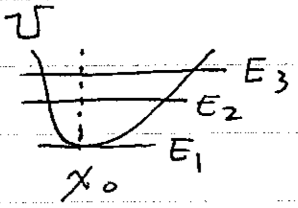
羅

Wolfson Example 7.7

兩個H原子的potential energy $U(x)$ 圖如 Fig. 7.11.
在接近底部時 $U(x) = U_0 + a(x-x_0)^2$, $U_0 = -7.60\times10^{-19}$ J,
$a = 286$ J/m² 且 $x_0 = 7.41\times10^{-11}$ m 為其平衡間距。
若系統的總能量為 -7.17×10^{-19} J, 則容許的原子間距為何?

Interpret: $E = K + U =$ constant (temperature-dependent)
When $E = U_0$, 原子間距只能是 x_0, as $E\uparrow$,
原子間距的容許值 (turning points) $\uparrow$.

Develop:



$E_3 > E_2 > E_1$,
U 和 E 的交點為 turning points

Evaluate: $E = U = U_0 + a(x-x_0)^2$

$$\therefore x = x_0 \pm \sqrt{\frac{E-U_0}{a}} = x_0 \pm 1.23\times10^{-11}\text{ m}$$

$$= 8.64 \text{ and } 6.18\times10^{-11}\text{ m} \quad \text{(turning points)}$$

Assess: 在接近U底部時常以 $U=\frac{1}{2}kx^2$ 的形式近似,
i.e. 兩個原子間的鍵結以理想 spring 近似 and
鍵結強度 ~ spring constant

雜