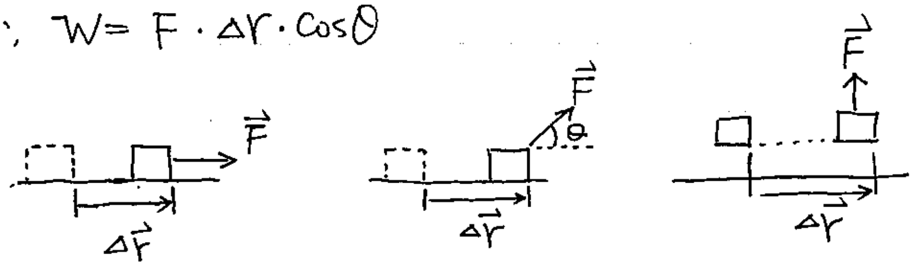
古典運動學問題可以用 Newton's laws 及 Work and energy 的方式解決。兩者的區別：前者是向量，後者是純量(scalar)

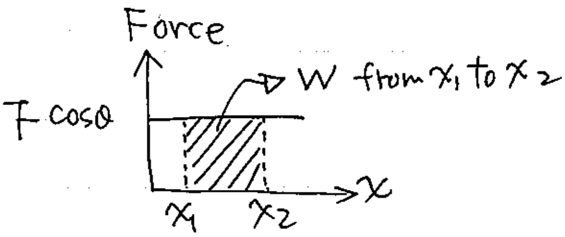
1. 功(work, 用W表示)的定義 and constant force 作的功

$W \equiv \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$ for a constant force $\vec{F}$ during $\Delta\vec{r}$

∴ $W = F\cdot\Delta r\cdot\cos\theta$



[W] (表W的單位) = N·m = J (joul)



From 定義 ⇒ 圓周運動中的向心力不作功 ∵ $\theta=90^\circ$.

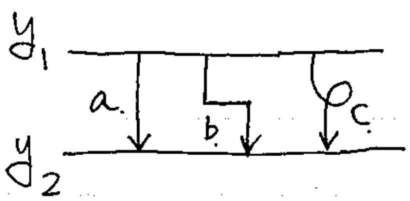
例子：friction 作功

$\vec{f} \leftarrow \square \rightarrow F$ 　 $\vec{f}$ 大部份情形下作負功 i.e. $W_f<0$.
but 也有例外, i.e. $\vec{f}$ 和 $\Delta\vec{r}$ 同方向、…

重力作功

∵ $\vec{g}$ 向下, ∵ 在地表附近 mg = constant.

∴ 重力所作的功只和垂直方向的位置有關，和物體經過的路徑無關



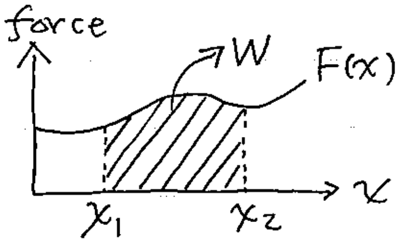
For path a. b. and c. 重力所作的功都相同.

雜

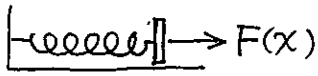
2. Variable force $F(x)$ 在 1-D 作功

所謂的 variable 指的是 $F(x)$, not $F(t)$.

∴



$$W=\int_{x_1}^{x_2}F(x)\,dx=[x_1,x_2]\ F(x)\text{下的面積}.$$

例子: spring force 

手拉(或推) spring, spring 作用在手的力 $F_{sp}(x)=-kx$,

而手施加在 spring 的力 $F(x)=kx=-F_{sp}$

∴ $F(x)$ 作功 $W=\int_0^x F(x)\,dx=\int_0^x kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2$

(外力作功所 transfer 的 energy 到哪裏去?)

Variable forces: $F(x)=\text{constant}\cdot x^n$

$n=0\Rightarrow$ constant force, 地表重力

$n=1\Rightarrow$ spring force

$n=-2\Rightarrow$ 萬有引力, EM 作用力

$n=-1\Rightarrow$ 特殊的 EM 作用力.

∘ Work in 2D and 3D

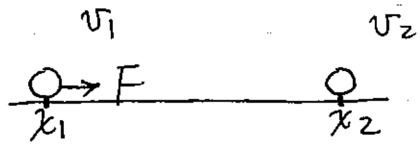
$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}\quad -(6.11)$$

沿著 $\vec{r}_1\to\vec{r}_2$ 的路徑積分, 為 line integral

雜

3、Kinetic energy (動能, 用 K 代表) and 1D 的 Work-energy theorem

in 1 D



constant $\vec{F}$ 作的功 $W=\int F\,dx=\int m\frac{dv}{dt}\cdot dx=m\int\frac{dx}{dt}\cdot dv$

$$=m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

Define $K\equiv\frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow W=K_2-K_1=\Delta K$: Work-energy theorem

∴ 正功 (i.e. $W>0$) 則 $K_2>K_1$ (動能↑)

負功 (i.e. $W<0$) 則 $K_2<K_1$ (動能↓)

$[K]$ = energy, ∴ SI 的 $[K]=1\,J=1\,N\cdot m$.

See 1D constant a 運動方程式:

$v_2^2=v_1^2+2a\cdot\Delta x=v_1^2+2a\cdot(x_2-x_1)\ \rightarrow(\times\frac{1}{2}m)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=ma\cdot\Delta x=F\cdot\Delta x=W$

i.e. $W=K_2-K_1=\Delta K$.

羅

4. Power

爬一段樓梯所需的功相同，無論是多快完成。但用跑的比用走的難度較高，why？

→ 單位時間所作的功。

Define 作功的 power（功率，用 P 表示）＝單位時間內所作的功。

$$\therefore \text{平均 } \bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \left.\right\} \; [P] = \frac{\text{能量}}{\text{時間}} = \frac{J}{S} \equiv \text{watt (用 W 表示)}$$

$$\text{瞬間 } P = \frac{dW}{dt}$$

常見的 [P] 為 horsepower（用 hp 表示，非 SI）：$1\,hp = 746\,W$.

if P is constant, then $W = P \cdot \Delta t$

if P is varying, then $W = \lim_{\Delta t \to 0} \sum P \cdot \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt$

∘ P vs. $\vec{v}$：

if $\vec{F}$ is not $\vec{F}(t)$, then $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ and ($\because \vec{F}$ is a constant force)

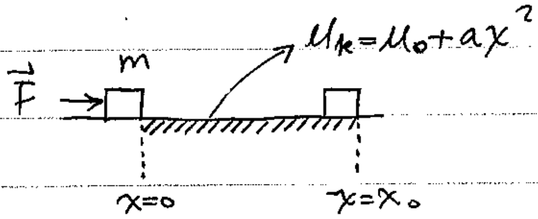
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\therefore P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

羅

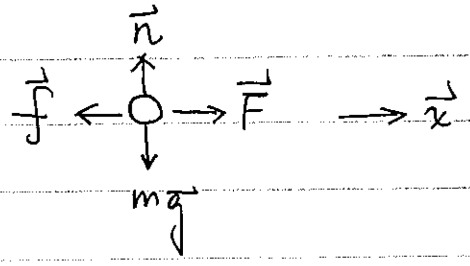
Wolfson Example 6.15

如右圖, μ_0, a, x_0 為已知量, 若要等速推 m 經過 $x=0$ 到 $x=x_0$。則需作功多少?



Interpret: 所需作的功 = |friction 所作的功|, 但 friction 因 $\mu_k=\mu_0+ax^2$, ∴是 varying force.

Develop:



$$\therefore f=\mu_k \cdot n = mg(\mu_0+ax^2)$$

Evaluate:

$$1D\ |W| \text{ of } f=\int_0^{x_0}|-f\cdot dx|=\int_0^{x_0} mg(\mu_0+ax^2)\,dx$$

$$=mg\left(\mu_0x_0+\frac{a}{3}x_0^3\right)=6.6\times10^3\ \mathrm{J}.$$

雜